# MATEMÁTICAS
# 2.º ESO

## somoslink

## SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

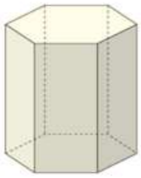
## Unidad 14. Geometría del espacio. Poliedros

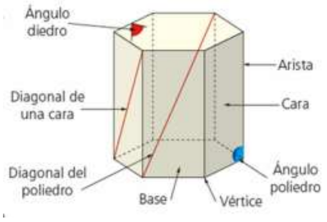
# Unidad 14. Geometría del espacio. Poliedros

**SOLUCIONES PÁG. 269**

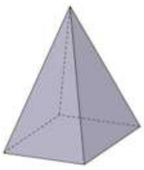
**1 Dibuja en tu cuaderno estos poliedros y señala sus elementos:**

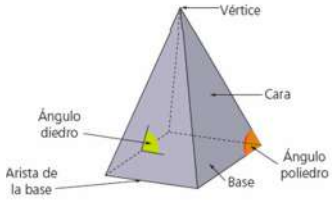
**a.**





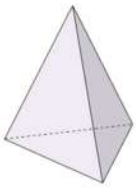

**b.**



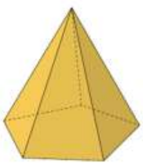



**2 Indica cuáles de estos poliedros son convexos y cuáles cóncavos:**

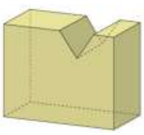
**a.**


Convexo, porque cualquier segmento que une dos puntos del poliedro queda contenido en él.

**b.**


Convexo, porque cualquier segmento que une dos puntos del poliedro queda contenido en él.

**c.**


Cóncavo, porque hay dos puntos del poliedro cuyo segmento que forman no está contenido en él.

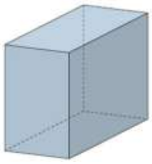
**d.**

Convexo, porque al menos hay dos puntos en el poliedro cuyo segmento de unión no está contenido en él.

**3 Comprueba si se cumple la fórmula de Euler en cada uno de estos poliedros:**

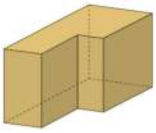
Según la fórmula de Euler, en un poliedro convexo la suma de las caras (C) más los vértices (V) igualan al número de aristas (A) más dos.

**a.**



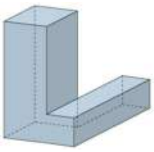
C = 6; V = 8; A = 12 ⇒ 6 + 8 = 12 + 2. La cumple, es convexo.

**b.**



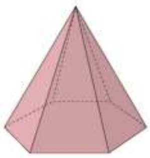
C = 8; V = 12; A = 18 ⇒ 8 + 12 = 18 + 2. La cumple, y es cóncavo.

**c.**



C = 10; V = 15; A = 21 ⇒ 10 + 15 ≠ 21 + 2. No la cumple, es cóncavo.

**d.**



C = 7; V = 7; A = 12 ⇒7 + 7 = 12 + 2. La cumple, es convexo.

**4 Mira a tu alrededor e indica tres objetos que sean poliedros convexos y otros tres que sean cóncavos.**

Respuesta abierta.

**5 Indica, razonando tu respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:**

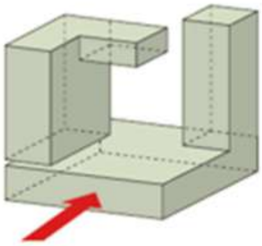
**a. La fórmula de Euler es válida para todos los poliedros.**
Falsa, algunos poliedros cóncavos no la cumplen.

**b. Una diagonal de un poliedro une dos de sus vértices.**
Falsa, una diagonal une dos vértices de caras distintas.

**c. Un poliedro convexo de 12 caras y 20 vértices tiene 30 aristas.**
Verdadera. Si es convexo cumple la fórmula de Euler, luego C + V = A + 2 ⇒ 12 + 20 = 30 + 2

**d. Las caras de un poliedro son iguales.**
Falsa, solo si es regular.

**6 Si observamos la figura desde el sentido indicado por la flecha, ¿cuál de las figuras se verá?**



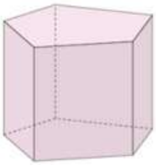
**a.**  **b.**  **c.** 

La figura c.

**7 Comprueba si se verifica la fórmula de Euler en los siguientes poliedros y clasifícalos en cóncavos o convexos:**

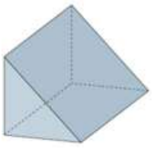
Según la fórmula de Euler, en un poliedro convexo C + V = A + 2.

**a.**



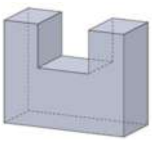
7 + 10 = 15 + 2. Poliedro convexo.

**b.**



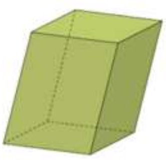
5 + 6 = 9 + 2. Poliedro convexo.

**c.**



10 + 16 = 24 + 2. Poliedro cóncavo, pero cumple la fórmula de Euler.

**d.**



6 + 8 = 12 + 2. Poliedro convexo.

**8 Un poliedro convexo tiene 8 caras y 6 vértices; ¿cuántas aristas tiene?**
Según la fórmula de Euler, $C + V = A + 2 \Rightarrow 8 + 6 = A + 2 \Rightarrow A = 12$
Tiene 12 aristas.

**9 Visita esta página de Internet para repasar la clasificación de los poliedros y sus elementos más importantes:**

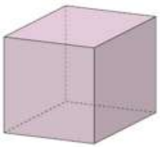
**http://conteni2.educarex.es/más/11999/contenido/**

Respuesta abierta.

**SOLUCIONES PÁG. 271**

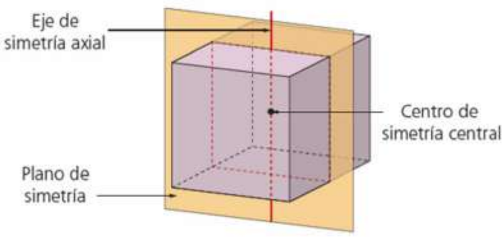
**10 Mira a tu alrededor e indica tres objetos que sean poliedros regulares.**
Respuesta abierta.

**11 Dibuja en tu cuaderno estos poliedros y señala en cada uno el centro de la simetría central, un eje de simetría axial y un plano de simetría:**
**a.**

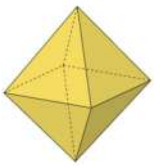


Para señalar los elementos se debe tener en cuenta que:

- El centro de simetría, O, equidista de los vértices del poliedro.
- Cada uno de los puntos del poliedro tiene asociado otro punto que equidista del eje de simetría axial.
- Un plano de simetría pasa por el centro de simetría y divide el poliedro en dos partes iguales.



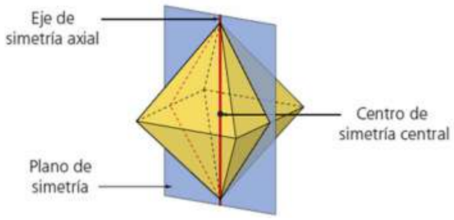

**b.**



Para señalar los elementos se debe tener en cuenta que:

- El centro de simetría, O, equidista de los vértices del poliedro.
- Cada uno de los puntos del poliedro tiene asociado otro punto que equidista del eje de simetría axial.

- Un plano de simetría pasa por el centro de simetría y divide el poliedro en dos partes iguales.




**12 Rellena en tu cuaderno la siguiente tabla y comprueba que se cumple la fórmula de Euler en los sólidos platónicos:**

| | Forma de las caras | N.º de caras | N.º de arista | N.º de vértices |
|---|---|---|---|---|
| Tetraedro | Triángulos | 4 | 6 | 4 |
| Octaedro | Triángulos | 8 | 12 | 6 |
| Icosaedro | Triángulos | 20 | 30 | 12 |
| Cubo | Cuadrados | 6 | 12 | 8 |
| Dodecaedro | Pentágonos | 12 | 30 | 20 |

Para comprobar la fórmula de Euler se debe aplicar en cada caso C + V = A + 2. En todos los casos se cumple.

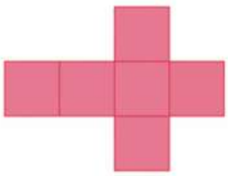
**13 Indica cuántas caras concurren en los vértices de cada uno de los sólidos platónicos.**

- En el tetraedro, en el cubo y en el dodecaedro concurren tres caras en cada vértice.
- En el octaedro concurren cuatro caras en cada vértice.
- En el icosaedro concurren cinco caras en cada vértice.

**14 Analiza cuál es el poliedro de menor número de caras y explica por qué no puede haber otro con menos caras.**
El menor número de caras que concurren en un vértice es tres, pero se necesita al menos una cara más para cerrar el poliedro. Por tanto, al menos el poliedro debe tener cuatro caras.

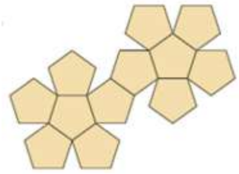
**15 Busca información acerca de la presencia de los poliedros regulares en la historia y de los diferentes matemáticos que los han estudiado.**
Respuesta abierta.

**16 Dibuja el desarrollo plano de un cubo y de un octaedro.**



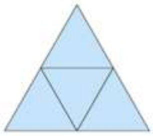
**17 Indica el nombre de los sólidos platónicos a los que corresponden estos desarrollos planos:**

**a.**



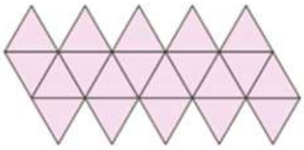
Dodecaedro (tiene 12 caras).

**b.**



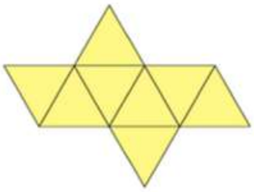
Tetraedro (tiene 4 caras)

**c.**



Icosaedro (tiene 20 caras)

**d.**



Octaedro (tiene 8 caras)

**18 Considerando los puntos medios de las caras de los sólidos platónicos como los vértices de un nuevo poliedro, se obtiene su poliedro dual, que está inscrito en él. Investiga más a fondo sobre este concepto y busca qué sólidos platónicos son duales entre sí.**

Respuesta abierta. Se puede poner como ejemplo el octaedro y el cubo. El octaedro se puede inscribir en un cubo, disponiendo los 6 vértices del octaedro en el centro de las 6 caras del cubo.

**19 ¿Cuál es el número mínimo de caras que concurren en el vértice de un poliedro?**

El número mínimo de caras que concurren en el vértice de un poliedro es tres.

**20 ¿Cuál es el máximo que pueden sumar los ángulos interiores de las caras que concurren en el vértice de un poliedro regular?**

Una de las condiciones para que un poliedro sea regular es que la suma de los ángulos interiores que convergen en cada vértice sea menor de 360º, es decir, los ángulos suman menos de 360º.

**21 Las caras de los sólidos platónicos son triángulos, cuadrados o pentágonos. ¿Por qué no pueden existir poliedros regulares con caras hexagonales?**

Porque en cada vértice concurren como mínimo tres caras y como el ángulo interior de un hexágono es de 120º, los ángulos que concurren en un vértice de ese poliedro suman 3 · 120 º = 360º, con lo que se incumple una de las condiciones de los poliedros regulares.

**22 Entre tu compañero y tú utilizad materiales como el poliedro para construir los sólidos platónicos y otros poliedros.**

Respuesta abierta.

**23 Indica cuánto suman los ángulos de las caras que concurren en cada vértice de:**

**a. Un cubo.**

En el vértice de un cubo concurren 3 caras, cada una de ellas con un ángulo de 90º, luego 3 · 90º = 270°

**b. Un tetraedro.**

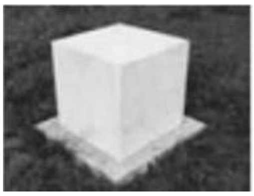
En el vértice de un tetraedro concurren 3 caras, cada una de ellas con un ángulo de 60º, luego 3 · 60º = 180°

**c. Un octaedro.**

En el vértice de un octaedro concurren 4 caras, cada una de ellas con un ángulo de 60º, luego 4 · 60º = 240°

**24 Indica cuáles de estas imágenes se corresponden con poliedros regulares y de qué tipo son:**

**a.**



Sí, es un cubo.

**b.**

Sí, es un dodecaedro.

**c.**

No es un poliedro regular.

**d.**

No es un poliedro regular porque no tiene iguales todas las caras.

**e.**

No es un poliedro regular porque la base es un cuadrado y las caras laterales son triángulos.

**f.**

No es un poliedro regular porque sus caras no son polígonos regulares iguales entre sí.

**SOLUCIONES PÁG. 273**

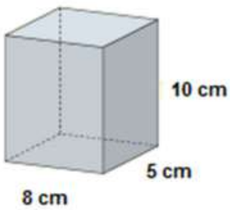
**25 Dibuja en tu cuaderno tres objetos con forma de prisma que veas a tu alrededor. Señala sus elementos y comprueba que se cumple la fórmula de Euler.**

Respuesta abierta.

**26 Actividad resuelta.**

**27 Determina el área y el volumen de un prisma rectangular cuyas aristas básicas miden 8 cm y 5 cm, respectivamente, y que tiene una altura de 10 cm.**

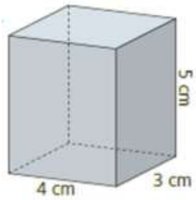
$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 2 \cdot 5 \cdot 8 + (2 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 5 \cdot 10) = 340$
$A_{total} = 340 \text{ cm}^2$




El volumen, por su parte, será:
$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$
$V = 400 \text{ cm}^3$

**28 Halla el área de los siguientes prismas:**

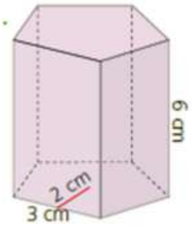
**a.**




$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$

$A_{\text{total}} = 2 \cdot 4 \cdot 3 + (2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 5) = 94 \Rightarrow A_{\text{total}} = 94 \text{ cm}^2$

**b.**



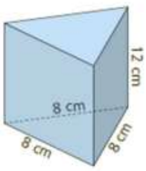

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h$$

La apotema del pentágono es 2 cm, y el perímetro es $P = 3 \cdot 5 = 15$ cm:

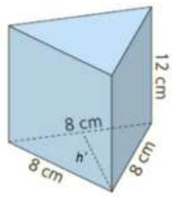
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{15 \cdot 2}{2} + 15 \cdot 6 = 120 \Rightarrow A_{\text{total}} = 120 \text{ cm}^2$$

**29 Calcula el volumen de los siguientes prismas:**

**a.**



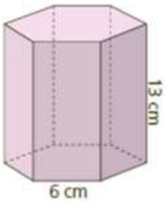

Para calcular el área de la base se calcula en primer lugar la altura del triángulo de la base, según el teorema de Pitágoras, $4^2 + h'^2 = 8^2 \Rightarrow h' = 6{,}93$ cm



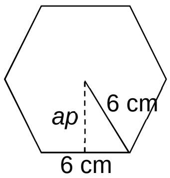

$$A_{base} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{base} = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \Rightarrow A_{base} = 27{,}72 \text{ cm}^2$$

$V = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V = 27{,}72 \cdot 12 = 332{,}64 \Rightarrow V = 332{,}64 \text{ cm}^3$

**b.**




Para calcular el área de la base se calcula en primer lugar la apotema del hexágono que forma la base, aplicando el teorema de Pitágoras, y teniendo en cuenta que en el hexágono el lado coincide con el radio de la circunferencia en que se inscribe ese hexágono, así que $3^2 + ap^2 = 6^2 \Rightarrow ap = 5{,}2$ cm.




$$A_{\text{base}} = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{\text{base}} = \frac{36 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \Rightarrow A_{\text{base}} = 93{,}6\ \text{cm}^2$$

$V = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V = 93{,}6 \cdot 13 = 1\,216{,}8\ \text{cm}^3$

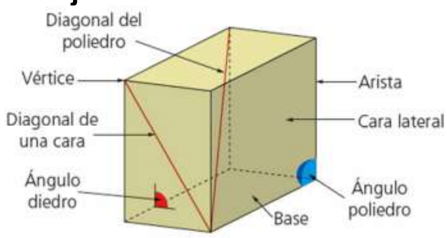
**30 ¿Qué capacidad tiene una piscina con forma de prisma rectangular cuyas dimensiones son 8 m × 4 m × 2 m? ¿Cuántos litros de agua puede contener?**

Tiene una capacidad de $8 \cdot 4 \cdot 2 = 64\ \text{m}^3$.

$1\ \text{m}^3 = 1\,000$ L, así que puede contener 64 000 L de agua.

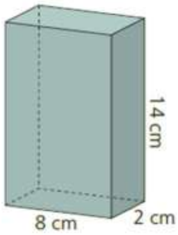
## SOLUCIONES PÁG 275

**31 Dibuja en tu cuaderno un ortoedro y señala sus elementos.**



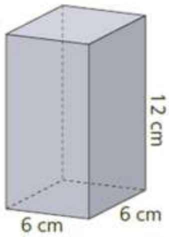
**32 Mira a tu alrededor y busca tres objetos con forma de paralelepípedo.**
Respuesta abierta.

**33 Determina el área y el volumen de los paralelepípedos.**
**a.**




$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 2 \cdot 8 \cdot 2 + (2 \cdot 2 \cdot 14 + 2 \cdot 8 \cdot 14) = 312 \Rightarrow A = 312\ cm^2$
$V = A_{base} \cdot h$
$V = 8 \cdot 2 \cdot 14 = 224 \Rightarrow V = 224\ cm^3$

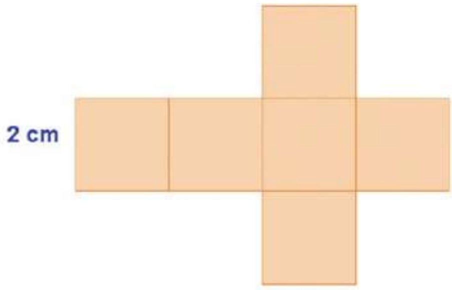
**b.**




$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 2 \cdot 6 \cdot 6 + (2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 12) = 360 \Rightarrow A_{total} = 360\ cm^2$
$V = A_{base} \cdot h$

$V = 6 \cdot 6 \cdot 12 = 432 \Rightarrow V = 432\ cm^3$

**34 Dibuja el desarrollo plano de un cubo de 2 cm de arista y halla su área y su volumen.**

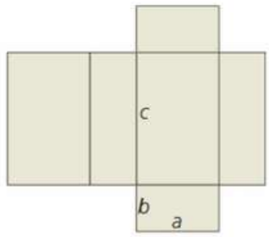



Se calcula el área total como la suma del área de 6 caras de 2 cm de lado:
$A_{total} = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24 \Rightarrow A_{total} = 24\ cm^2$
Se calcula el volumen según la expresión:
$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = 4 \cdot 2 = 8 \Rightarrow V = 8\ cm^3$

**35** **Las dimensiones de un armario de madera son 1 m de ancho, 60 cm de fondo y 2 m de alto.**

**a. ¿Qué cantidad de corcho se necesita para forrarlo interiormente?**

Se construye el desarrollo plano del paralelepípedo, con los valores $a$ = 1 m, $b$ = 0,6 m y $c$ = 2 m.




El área del armario es la suma del área de las bases más el área lateral:

$A_{total} = A_{bases} + A_{lateral}$

$A_{total} = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c = 2 \cdot (1 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 2 + 1 \cdot 2) = 7{,}60$

Se necesita 7,60 $m^2$ de corcho.

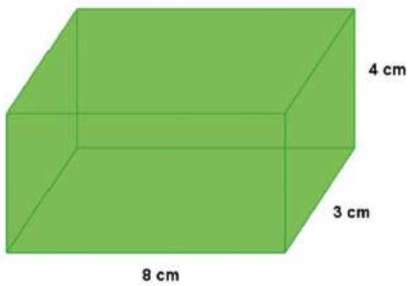
**b. ¿Qué capacidad tiene?**

Se calcula el volumen como:

$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = a \cdot b \cdot c = 1{,}2 \Rightarrow V = 1{,}2\ m^3$

**36** **Dibuja un ortoedro que tenga unas dimensiones de 8 cm por 3 cm de base y 4 cm de altura. Calcula su área total y su volumen.**

La figura es la siguiente:




Se calcula el área como la suma del área de las bases más el área lateral:

$A_{total} = A_{bases} + A_{lateral}$

$A_{total} = 2 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 8 \cdot 4 = 136 \Rightarrow A_{total} = 136\ cm^2$

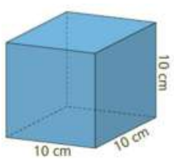
Se calcula el volumen como:

$V = A_{base} \cdot h$

$V = 8 \cdot 3 \cdot 4 = 96 \Rightarrow V = 96\ cm^3$

**37** **Halla el área total y el volumen de los siguientes paralelepípedos:**

**a.**



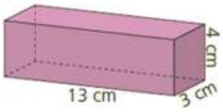

Se calcula el área total como la suma del área de 6 caras de 10 cm de lado:

$A_{total} = 10 \cdot 10 \cdot 6 = 600 \Rightarrow A_{total} = 600\ cm^2$

$V = A_{base} \cdot h$

$V = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000 \Rightarrow V = 1\,000\ cm^3$

**b.**




Se calcula el área como la suma del área de las bases más el área lateral:

$A_{total} = A_{bases} + A_{lateral}$

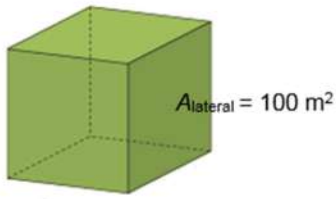
$A_{total} = 2 \cdot 13 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 13 \cdot 4 = 206 \Rightarrow A_{total} = 206\ cm^2$

$V = A_{base} \cdot h$

$V = 13 \cdot 3 \cdot 4 = 156 \Rightarrow V = 156\ cm^3$

**38 Halla el área total y el volumen de un cubo que tiene un área lateral de 100 m$^2$.**

Se plantea la figura según los datos del enunciado. Al tratarse de un cubo el área lateral es cuatro veces el área de una de las caras, entonces el área de cada cara es:




$A_{cara} = \frac{100}{4} = 25 \Rightarrow A_{cara} = 25\ m^2$

Luego la arista del cubo mide 5 m.

Se calcula el área total: $A_{total} = 6 \cdot A_{cara} \Rightarrow A_{total} = 6 \cdot 25 = 150 \Rightarrow A_{total} = 150\ m^2$

Se calcula el volumen: $V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = 25 \cdot 5 = 125 \Rightarrow V = 125\ m^3$

**39 El área lateral de un ortoedro es de 72 m$^2$. Si las dimensiones de su base son 4 m × 5 m, ¿cuánto miden su área total y su volumen?**

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

$A_{base} = 4 \cdot 5 = 20\ m^2$; $A_{lateral} = 72\ m^2 \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot 20 + 72 = 112\ m^2$

Si llamamos $x$ a la altura del ortoedro, se calcula dicha altura a partir del área lateral:

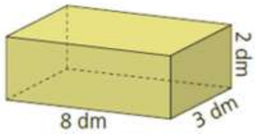
$A_{lateral} = 2 \cdot 5 \cdot x + 2 \cdot 4 \cdot x \Rightarrow 72 = 10x + 8x \Rightarrow x = 4$ m

La altura del ortoedro mide 4 m, luego:

$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = 20 \cdot 4 = 80 \Rightarrow V = 80\ m^3$

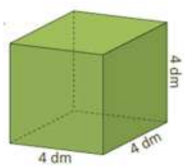
**40 Calcula mentalmente el volumen de los siguientes paralelepípedos:**

**a.**




$V = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48\ dm^3$

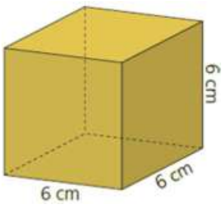
**b.**



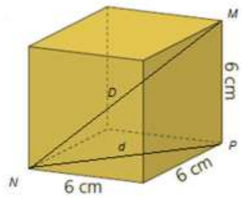

$V = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64\ dm^3$

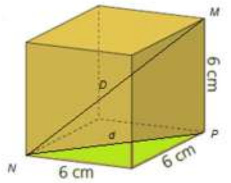
**41 Halla la longitud de la diagonal de estos paralelepípedos:**

**a.**




Se observa el triángulo *MNP* y según el teorema de Pitágoras:




$D^2 = d^2 + 6^2$

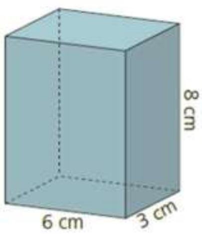
Como no se conoce la diagonal *d*, se debe aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo verde de la base:

$d^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow d^2 = 72 \Rightarrow d = 8{,}49$ cm

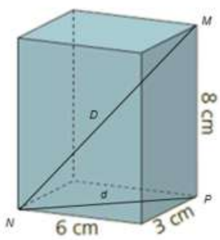
Se sustituye la distancia *d* para calcular *D:*

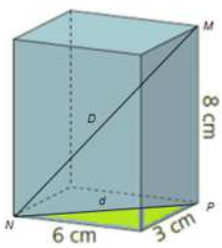
$D^2 = 8{,}49^2 + 6^2 \Rightarrow D^2 = 108{,}08 \Rightarrow D = 10{,}4$ cm

**b.**




Se observa el triángulo *MNP* y según el teorema de Pitágoras:




$D^2 = d^2 + 8^2$

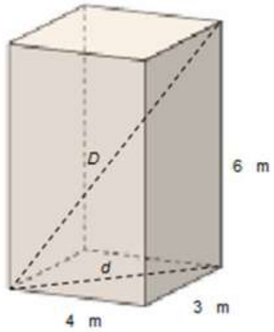
Como no se conoce la diagonal *d*, se debe aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo verde de la base:

$d^2 = 6^2 + 3^2 \Rightarrow d^2 = 45 \Rightarrow d = 6{,}71$ cm

Se sustituye la distancia *d* para calcular *D:*

$D^2 = 6{,}71^2 + 8^2 \Rightarrow D^2 = 109{,}02 \Rightarrow D = 10{,}44$ cm

**42 Determina la longitud de la cuerda más larga que une dos vértices en una habitación ortoédrica que tiene unas dimensiones, en metros, de 4 × 6 × 3.**




Según el teorema de Pitágoras:

$D^2 = d^2 + 6^2$

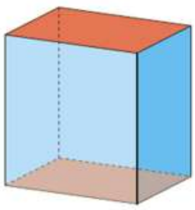
Como no se conoce la diagonal *d*, se debe aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo de la base:

$d^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow d = 5$ m

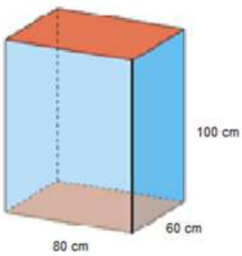
Se sustituye la distancia *d* para calcular *D*:

$D^2 = 5^2 + 6^2 \Rightarrow D^2 = 61 \Rightarrow D = 7{,}81$ m es la longitud de la cuerda.

**43 Sergio ha construido un ortoedro de cartón que tiene unas dimensiones, en centímetros, de 80 × 60 × 100.**



**Si quiere pintar las bases de rojo y las caras laterales de azul, ¿qué superficie pintará de cada color?**




Se calcula el área de cada cara que interesa pintar:

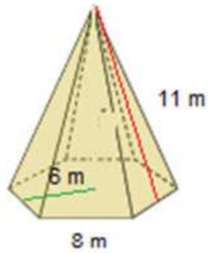
$A_{rojo} = 2 \cdot 80 \cdot 60 = 9\,600 \Rightarrow A_{rojo} = 9\,600$ cm$^2$

$A_{azul} = 2 \cdot 60 \cdot 100 + 2 \cdot 80 \cdot 100 = 28\,000 \Rightarrow A_{azul} = 28\,000$ cm$^2$

## SOLUCIONES PÁG. 277

**44 Halla el área de una pirámide hexagonal de 11 m de apotema, 8 m de arista básica y 6 m de apotema básica.**

Se calcula el área de la base según la expresión:




$A_{\text{pirámide}} = P \cdot \dfrac{ap + ap'}{2}$, donde $P$ es el perímetro de la base, *ap* la apotema de la pirámide y *ap'* la apotema básica.

En este caso $P = 8 \cdot 6 = 48$ m; $ap = 11$ m y $ap' = 6$ m

$$A_{\text{pirámide}} = 48 \cdot \frac{11+6}{2} = 408 \Rightarrow A_{\text{pirámide}} = 408\ \text{m}^2$$

**45 Actividad resuelta.**

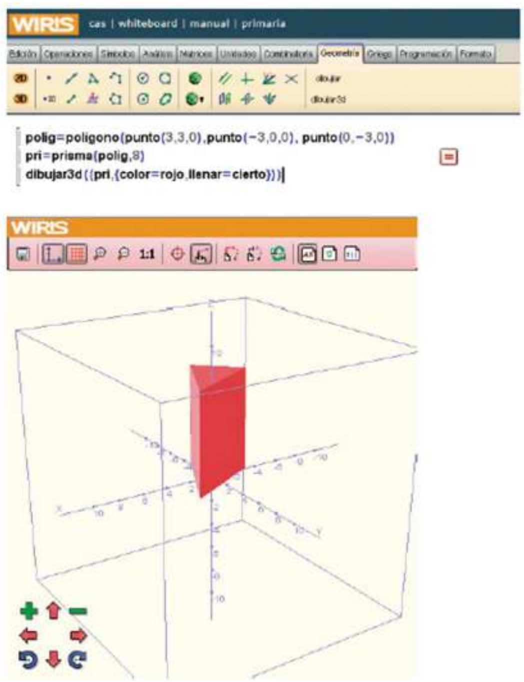
**46 Actividad resuelta.**

## SOLUCIONES PÁG. 278

## HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

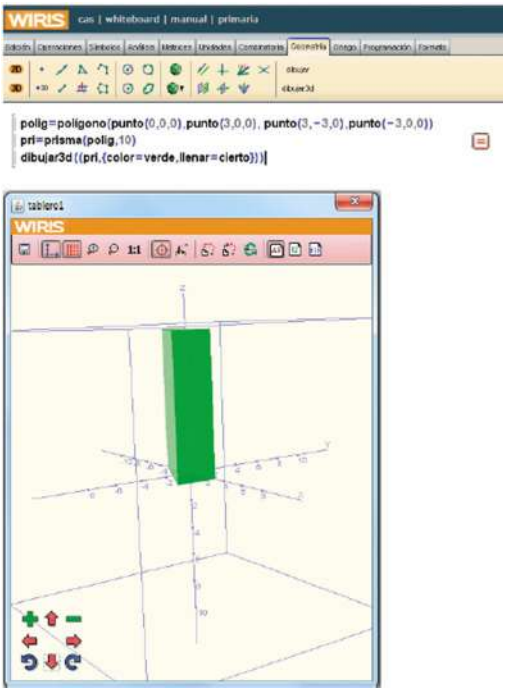
**1 Dibuja un prisma triangular que tenga 8 unidades de altura y color rojo.**

Mediante la herramienta WIRIS se obtiene:



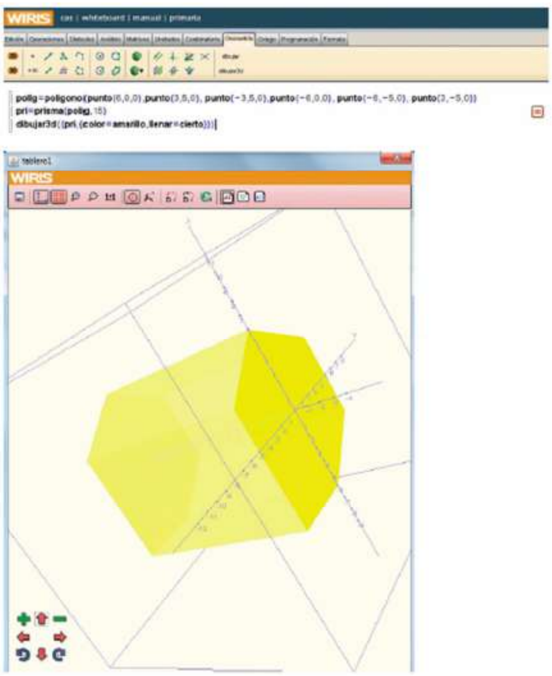
**2 Dibuja un prisma cuadrangular cuya altura valga 10 y que sea de color verde.**

Mediante la herramienta WIRIS se obtiene:



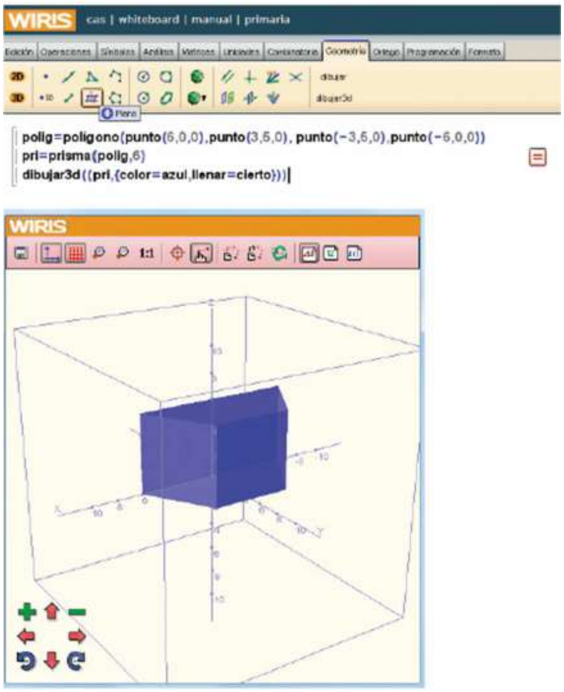

**3 Dibuja un prisma hexagonal de 15 unidades de altura y color amarillo.**

Mediante la herramienta WIRIS se obtiene:



**4 Dibuja un prisma cuadrangular con una base que no esté centrada en el origen de coordenadas.**

Mediante la herramienta WIRIS se obtiene:

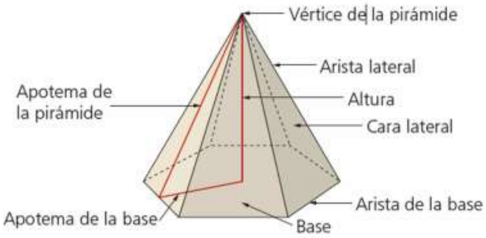



## SOLUCIONES PÁG. 279 - APRENDO A APRENDER

**1 ¿Con qué otro nombre se conoce a los poliedros regulares?**

Con el nombre de sólidos platónicos.

**2 Dibuja una pirámide en tu cuaderno y señala sus elementos.**




**3 ¿Cuál es la diferencia entre la diagonal de un poliedro y la diagonal de una de sus caras?**

La diagonal del poliedro une vértices de caras distintas y la de un polígono une vértices de una cara que no sean contiguos.

**4 Explica la diferencia entre un poliedro cóncavo y uno convexo.**

En un poliedro convexo el segmento que une dos puntos cualesquiera está contenido en el poliedro, mientras que en un poliedro cóncavo hay al menos dos puntos del poliedro cuyo segmento que forman no está contenido en él.

**5 Además de que sus caras sean polígonos regulares e iguales entre sí, ¿qué otras dos condiciones cumplen los poliedros regulares?**

En cada vértice deben concurrir el mismo número de caras, que deben ser al menos tres, y la suma de los ángulos que convergen en cada vértice debe ser menor de 360º.

**6** **Escribe alguno de los elementos de un prisma.**
Los elementos son: altura, bases, arista de la base, apotema de la base, cara lateral, arista lateral.

**7** **Explica qué es el desarrollo plano de un poliedro.**
Es el poliedro extendido en un plano.

**8** **¿En qué se diferencia un paralelepípedo de un prisma?**
Un paralelepípedo es un prisma de 6 caras con forma de paralelogramo, en el que cada par de caras opuestas son paralelas e iguales entre sí.
Un prisma puede tener más o menos caras y puede que las caras laterales no sean iguales.

**9** **Escribe alguno de los elementos de una pirámide.**
Los elementos son: altura, vértice de la pirámide, apotema de la pirámide, arista lateral, cara lateral, base, arista de la base, apotema de la base.

**10** **El volumen de una pirámide es inferior al de un prisma que tenga la misma base y la misma altura; ¿cuánto menor es?**
El volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}$ inferior al volumen de un prisma que tenga la misma base y la misma altura.

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$$

**11** **¿Cuál es el enunciado de la fórmula de Euler para poliedros convexos?**
Caras + Vértices = Aristas + 2

**12** **¿Qué elementos determinan las simetrías en los poliedros regulares?**
El centro de simetría, los ejes de simetría y planos de simetría.

**13** **Explica la diferencia entre un prisma recto y un prisma oblicuo.**
En un prisma recto la altura es perpendicular a sus bases y en un prisma oblicuo no.

**14** **Un paralelepípedo es un prisma especial; ¿qué le diferencia del resto de prismas?**
Se diferencia en que todas sus caras son paralelogramos.

**15** **¿Qué elementos de un paralelepípedo forman un triángulo rectángulo en el que se puede aplicar el teorema de Pitágoras en el espacio?**
La arista lateral, la diagonal de una base y la diagonal del prisma.

**16** **Describe qué es la apotema de una pirámide e indica las diferencias que tiene con respecto a la apotema de la base.**
La apotema de la pirámide es la altura de sus caras laterales.

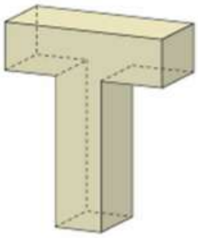
**17** **Realiza una presentación digital a tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…**
Respuesta abierta.

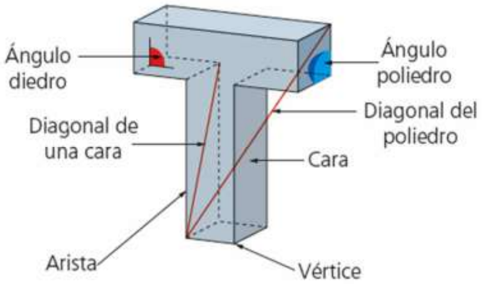
**SOLUCIONES PÁG. 280 - REPASO FINAL**

**POLIEDROS**

**1 Dibuja los siguientes poliedros en tu cuaderno y señala sus elementos, indicando si son cóncavos o convexos, y comprueba si se cumple la fórmula de Euler:**

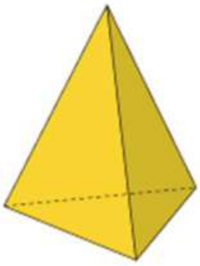
**a.**

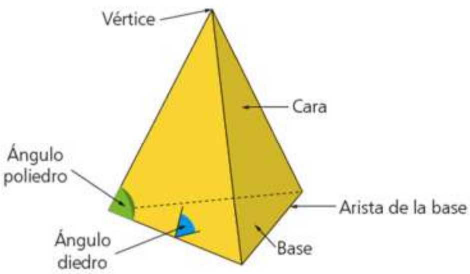





Cóncavo, aunque se cumple la ecuación de Euler:
C + V = A + 2 = 10 + 16 = 24 + 2

**b.**

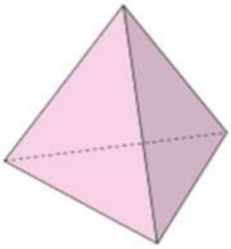




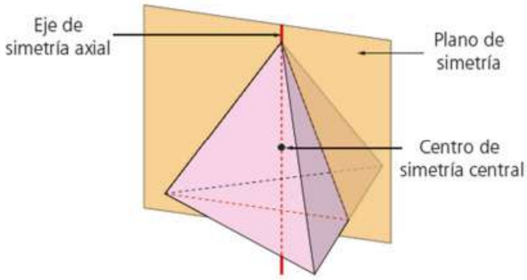

Convexo. Se cumple la ecuación de Euler:
C + V = A + 2 = 4 + 4 = 6 + 2

**POLIEDROS REGULARES**

**2 Indica y dibuja en tu cuaderno alguno de los ejes y planos de simetría de un tetraedro regular.**



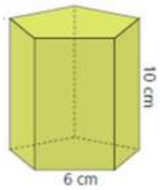
Se debe tener en cuenta que un plano de simetría pasa por el centro de simetría, del que equidistan los vértices del poliedro, y que divide el poliedro en dos partes iguales.




**PRISMAS**

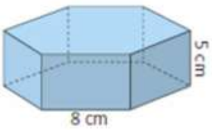
**3 Calcula mentalmente el área lateral de los siguientes prismas:**

**a.**




$A_{lateral} = 5 \cdot 6 \cdot 10 = 300 \Rightarrow A_{lateral} = 300 \text{ cm}^2$

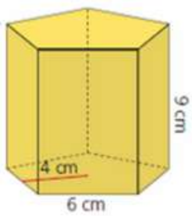
**b.**




$A_{lateral} = 6 \cdot 8 \cdot 5 = 240 \Rightarrow A_{lateral} = 240 \text{ cm}^2$

**4 Halla el área total y el volumen de estos prismas:**

**a.**

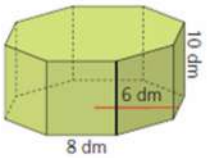



$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h$$

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 4}{2} + 5 \cdot 6 \cdot 9 = 390 \Rightarrow A_{total} = 390 \text{ cm}^2$$

$$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4}{2} \cdot 9 = 540 \Rightarrow V = 540 \text{ cm}^3$$

**b.**




$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h$$

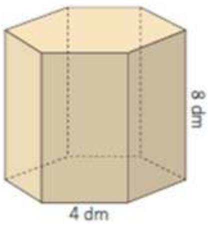
$$A_{total} = 2 \cdot \frac{8 \cdot 8 \cdot 6}{2} + 8 \cdot 8 \cdot 10 = 1\,024 \Rightarrow A_{total} = 1024 \text{ dm}^2$$

$$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{8 \cdot 8 \cdot 6}{2} \cdot 10 = 1\,920 \Rightarrow V = 1\,920 \text{ dm}^3$$

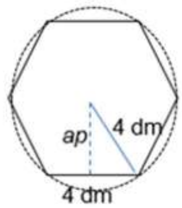
**5 Actividad resuelta.**

**6 Determina el área y el volumen de estas figuras:**

**a.**




Al tratarse la base de un hexágono regular, el lado del polígono mide lo mismo que el radio de la circunferencia en que se inscribe, con lo cual la apotema se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:



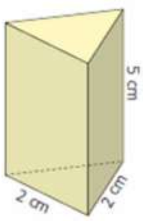

$2^2 + ap^2 = 4^2 \Rightarrow ap = 3{,}46$ dm mide la apotema de la base.

$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h$$

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 3{,}46}{2} + 6 \cdot 4 \cdot 8 = 275{,}04 \Rightarrow A_{total} = 275{,}04 \text{ dm}^2$$

$$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3{,}46}{2} \cdot 8 = 332{,}16 \Rightarrow V = 332{,}16 \text{ dm}^3$$

**b.**




Se debe calcular la altura de la base, *h*’, aplicando el teorema de Pitágoras a dicha base:

$1^2 + h'^2 = 2^2 \Rightarrow h' = 1{,}73$ cm

Con lo cual, el área total es:

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{b \cdot h'}{2} + P \cdot h$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}73}{2} + 3 \cdot 2 \cdot 5 = 33{,}46 \Rightarrow A_{\text{total}} = 33{,}46 \text{ cm}^2$$

$$V = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V = \frac{b \cdot h'}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{2 \cdot 1{,}73}{2} \cdot 5 = 8{,}65 \Rightarrow V = 8{,}65 \text{ cm}^3$$

**7 ¿Cuántos litros caben en un depósito en forma de prisma rectangular cuyas dimensiones, en metros, son 2 × 1 × 2?**

El volumen es: $V = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ m$^3$ = 4 000 L.

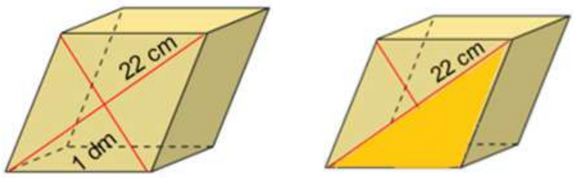
**8 Calcula el volumen de un prisma heptagonal, sabiendo que su área lateral mide 462 cm$^2$; su arista básica, 6 cm, y su apotema, 3 cm.**

Como se trata de un prisma regular el área de todas las caras laterales es igual, y como son 7 caras, a cada una le corresponden: $\frac{462}{7} =$ 66 cm$^2$, es decir, 6 cm de lado por 11 cm de alto. La altura del prisma es, por tanto, 11 cm.

$$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{7 \cdot 6 \cdot 3}{2} \cdot 11 = 693 \Rightarrow V = 693 \text{ cm}^3$$

**9 Halla el área total de un romboedro cuyas caras tienen unas diagonales que miden 1 dm y 22 cm, respectivamente.**

Las diagonales del romboedro son estas:




Se calcula el área del triángulo coloreado:

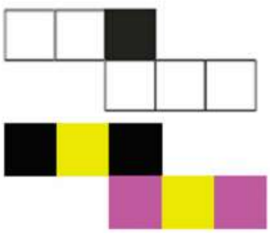
$$A_{\text{triángulo}} = \frac{D \cdot \frac{d}{2}}{2} \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = \frac{22 \cdot 5}{2} = 55 \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = 55 \text{ cm}^2$$

Es decir, el área de cada cara del romboedro es $A_{\text{cara}} = A_{\text{triángulo}} \cdot 2 = 110$ cm$^2$

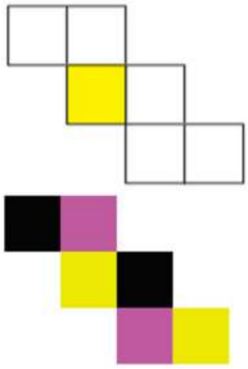
Y el área total del romboedro es: $A_{\text{romboedro}} = A_{\text{cara}} \cdot 6 = 110 \cdot 6 = 660$ cm$^2$.

**10 Las caras opuestas de un cubo se pintan del mismo color. Se emplean tres colores: amarillo, rosa y negro. Indica dónde debe ir cada color.**

**a.**



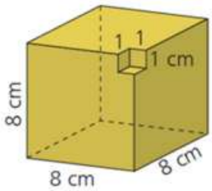
**b.**

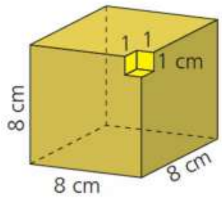


**SOLUCIONES PÁG 281**

**11 Halla el área total y el volumen de las siguientes figuras:**

**a.**



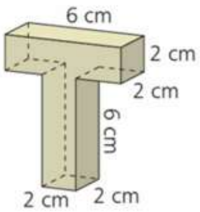

El área del cubo completo, de 8 cm de lado, sería

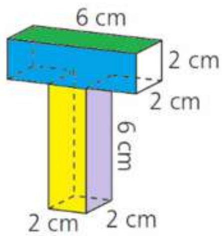
$A_{cubo} = 8 \cdot 8 \cdot 6 = 384$ cm$^2$.

Si se observa, el área que falta en el cubo incompleto es la misma que se añade con las nuevas caras coloreadas de amarillo. Por tanto, el área del cubo incompleto es también 384 cm$^2$.

El volumen sí cambia: el del cubo completo sería $V = 8^3 = 512$ cm$^3$, pero el del cubo incompleto es 1 cm$^3$ menor, es decir, 511 cm$^3$.

**b.**




Se puede calcular el área sumando el área de cada una de las caras:

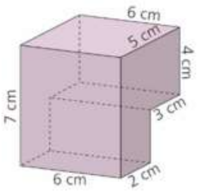
$A_{total} = 7$ caras $\cdot\ 2 \cdot 6 + 5$ caras $\cdot\ 2 \cdot 2 = 104$ cm$^2$

El volumen se calcula sumando los volúmenes de los dos paralelepípedos de dimensiones $2 \times 2 \times 6$, es decir

$V = 24 + 24 = 48$ cm$^3$

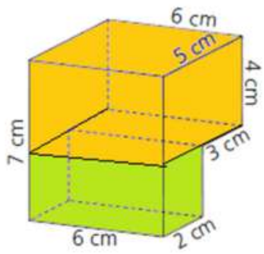
**12 Calcula el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos:**

**a.**




Se calcula el área sumando el de todas las caras como si estuvieran completas y restando los dos trozos laterales de 3 × 3:

$A = 2 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 7 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = 60 + 84 + 70 - 18 = 196\ \text{cm}^2$

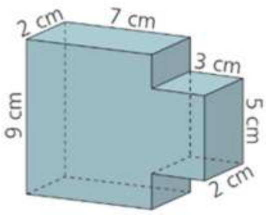



Se calcula el volumen sumando el de los dos cuerpos señalados en la figura (o restando la porción que falta al volumen total):

$V = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 \cdot 6 = 156\ \text{cm}^3$

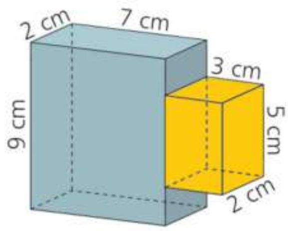
$V = 5 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 3 \cdot 6 = 156\ \text{cm}^3$

**b.**




Se calcula el área sumando el de todas las caras:

$A_{total} = 2 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 232\ \text{cm}^2$



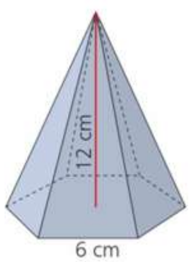

Se calcula el volumen sumando el de los dos cuerpos señalados en la figura:

$V = 7 \cdot 2 \cdot 9 + 3 \cdot 2 \cdot 5 = 156\ \text{cm}^3$

**PIRÁMIDES Y TRONCOS DE PIRÁMIDES**

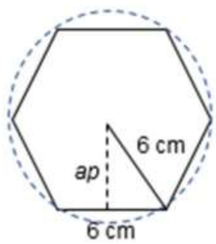
**13 Halla el área lateral de las siguientes figuras:**

**a.**



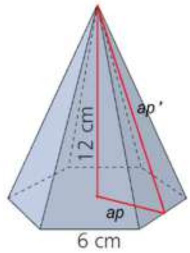

- Se calcula la apotema de la base, aplicando el teorema de Pitágoras y sabiendo que en el hexágono regular el lado coincide con el radio:

  $3^2 + ap^2 = 6^2 \Rightarrow ap = 5{,}2\ \text{cm}$



- Se calcula la apotema de la pirámide, aplicando el teorema de Pitágoras:

$ap^2 + 12^2 = ap'^2 \Rightarrow 5{,}2^2 + 144 = ap'^2 \Rightarrow ap' = 13{,}08$ cm

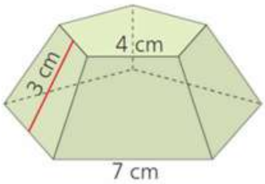


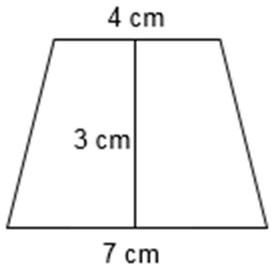

- Se calcula el área lateral con la expresión:

$$A_{\text{lateral}} = n \cdot \frac{l \cdot ap'}{2} \Rightarrow A_{\text{lateral}} = 6 \cdot \frac{6 \cdot 13{,}08}{2} = 235{,}44 \text{ cm}^2,$$

donde $n$ es el número de lados y $l$ la longitud del lado.

**b.**




$$A_{\text{lateral}} = n \cdot \frac{(l + l') \cdot ap_l}{2}$$

$$A_{\text{lateral}} = 5 \cdot \frac{(4+7) \cdot 3}{2} = 82{,}5$$

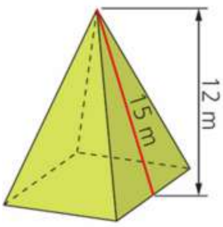
$$A_{\text{lateral}} = 82{,}5 \text{ cm}^2$$

**14 Una pirámide de 28 aristas ¿cuántos vértices tiene?**

En una pirámide el número de lados de la base es igual al número de vértices más 1, luego se trata de una pirámide con una base de 14 lados, es decir, 15 vértices.

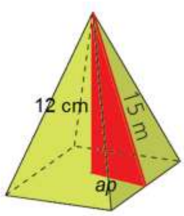
**15 Halla el área total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:**

**a.**




- Se calcula la apotema de la base, aplicando el teorema de Pitágoras:

$ap^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow ap = 9$, es decir, la arista de la base mide $9 \cdot 2 = 18$ m



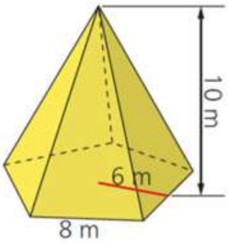

- Se calcula el área total según la expresión:

$$A = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A = 4 \cdot 18 \cdot \frac{9 + 15}{2} = 864 \Rightarrow A = 864 \text{ m}^2$$

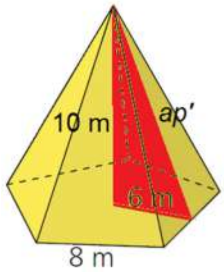
- Se calcula el volumen según la expresión:

$$V = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{18 \cdot 18 \cdot 12}{3} = 1\,296 \Rightarrow V = 1\,296 \text{ m}^3$$

**b.**




- Se calcula la apotema de la pirámide, según el teorema de Pitágoras:
  $6^2 + 10^2 = ap'^2 \Rightarrow ap' = 11,66$
- Se calcula el área total según la expresión:




$$A = P \cdot \frac{ap + ap'}{2}$$

$$A = 5 \cdot 8 \cdot \frac{6 + 11,66}{2} = 353,2$$

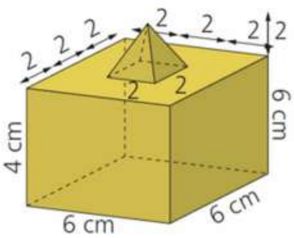
$$A = 353,2 \text{ m}^2$$

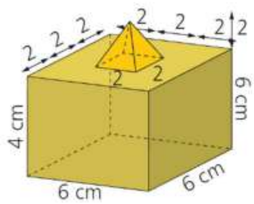
- Se calcula el volumen según la expresión:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 8 \cdot 6}{2} \cdot 10 = 400 \Rightarrow V = 400 \text{ m}^3$$

**16 Determina el volumen de estas figuras:**

**a.**

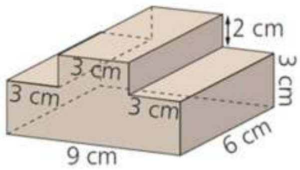


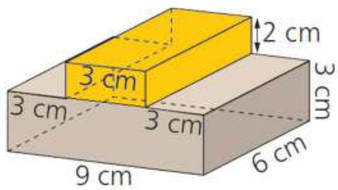




Se calcula el volumen de cada figura coloreada, teniendo en cuenta que la altura de la pirámide es 2 cm:

$$V = 6 \cdot 6 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 146,67 \text{ m}^3$$

**b.**




Se calcula el volumen de cada figura coloreada:
$V = 9 \cdot 3 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 6 = 198 \text{ m}^3$

**EVALUACIÓN**

1 **El área de un prisma rectangular de 6 m de altura y cuya base mide 3 m × 4 m es:**

a. 108 $m^2$ **b. 72 $m^2$** **c. 18 $m^2$** **d. 96 $m^2$**

El prisma tiene unas dimensiones de 3 × 4 × 6, luego su área es:
$A = 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 108\ m^2$

2 **El poliedro que tiene 30 aristas es:**

**a. El tetraedro.** c. El icosaedro.
**b. El octaedro.** d. El dodecaedro.

El tetraedro tiene 6, el octaedro 12, el dodecaedro y el icosaedro tienen 30 aristas.

3 **Si un cubo tiene un volumen de 216 $m^3$, el área de una de sus caras es:**

**a. 24 $m^2$** **b. 6 $m^2$** c. 36 $m^2$ **d. 100 $m^2$**

Un cubo tiene 6 caras iguales, así que el área de cada cara es: $\frac{216}{6} = 36\ m^2$.

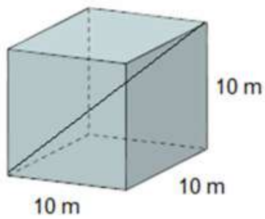
4 **El volumen de una pirámide pentagonal de 8 m de altura y cuya base tiene una arista de 5 m y una apotema de 3 m es:**

**a. 84 $m^3$** b. 100 $m^3$ **c. 64 $m^3$** **d. 200 $m^3$**

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 3}{2} \cdot 8 = 100 \Rightarrow V = 100\ m^3$$

5 **La máxima distancia que se puede recorrer en línea recta en un hexaedro de 10 m de arista es:**

**a. 10 m** c. Entre 15 y 20 m
**b. Entre 10 y 15 m** **d. 20 m**




La diagonal del hexaedro se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:
$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, donde $a = b = c = 10$ m

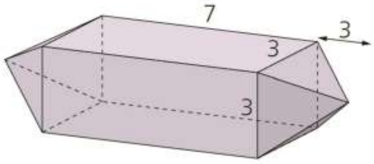
6 **El área total de una pirámide cuadrangular de 8 m de altura y 4 m de arista básica es:**

a. 81,97 $m^2$ **b. 99,9 $m^2$** **c. 81,1 $m^2$** **d. 65 $m^2$**

Se calcula la apotema de la pirámide:
$2^2 + 8^2 = ap'^2 \Rightarrow ap' = 8{,}246$ m

$$A = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A = 4 \cdot 4 \cdot \frac{2 + 8{,}246}{2} = 81{,}97\ m^2$$

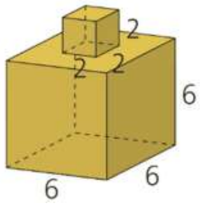
**7 El volumen de esta figura cuyas medidas están dadas en metros es:**




**a. 80 m³** b. 81 $m^3$ **c. 82 $m^3$** **d. 83 $m^3$**

$V = 7 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81\ m^3$

**8 El área, en decámetros cuadrados, de esta figura cuyas medidas están dadas en metros es:**




**a. 1 $dam^2$** **b. 0,250 $dam^2$** c. 2,32 $dam^2$ **d. 0,5 $dam^2$**

$A = 6 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 232\ m^2 = 2{,}32\ dam^2$