INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ La finalidad de esta unidad es continuar el estudio de las figuras geométricas espaciales, en particular de los cuerpos redondos y especialmente de aquellos conocidos como cuerpos de revolución.

En primer lugar leeremos el texto introductorio y lo comentaremos con el alumnado siguiendo este cuestionario:

- *¿Qué son entonces los cuerpos redondos?*
- *¿Tendrá elementos parecidos a aquellos de los poliedros?*
- *¿Qué otros objetos de la vida cotidiana pueden ser cuerpos redondos??*
- *¿Son útiles los cuerpos redondos?*

■ A continuación prestaremos atención a la imagen de presentación, al índice de contenidos de esta unidad y al esquema que los relaciona:

- *¿Se te ocurren ejemplos de objetos cuya forma se base un cilindro, un cono o una esfera?*
- *¿Qué estamos viendo en la fotografía de esta presentación del tema?¿Cuántos cuerpos redondos podemos encontrar en ella?*

Empezamos la unidad

■ Como introducción y repaso de ciertos conceptos que se desarrollarán a lo largo de la unidad, se proponen una serie de actividades, cuyos objetivos particulares son:

- La actividad 1 revisa el nombre de las figuras planas más sencillas, el rectángulo, el triángulo y el círculo.
- En la actividad 2 se repasa el algoritmo para calcular el área de un rectángulo conocidos sus dos lados.
- La actividad 3 revisa el cálculo del área de un triángulo conocidas su base y su altura.
- En la actividad 4 repasaremos la fórmula necesaria para calcular el área del círculo a partir de su radio, imprescindible para trabajar los ejercicios de esta unidad.
- La actividad 5 trabaja el teorema de Pitágoras, calculando la hipotenusa a partir de los catetos de un triángulo rectángulo.

■ Con el fin de comprobar el nivel de conocimientos del que parten los alumnos y alumnas, les pediremos que resuelvan por parejas estas actividades.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Act. 1*. Expresar de forma escrita los conocimientos adquiridos en cursos anteriores al resolver la actividad.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1, 2, 3, 4 y 5.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.

■ *Acts. 2 y 3.* Saber transformar la información recopilada en cursos anteriores en conocimiento propio.

■ *Esquema pág. 214*. Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Texto pág. 214.* Descubrir que algunos cuerpos redondos comparten características comunes, como el propio planeta Tierra.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 4 y 5*. Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos previos que se tienen sobre figuras y áreas para resolver la actividad.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para empezar el tema podemos visualizar el recurso del siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749501

Se trata de un vídeo de quince minutos en el que se explican las características de los cuerpos de revolución acompañado de una forma animada de su construcción y cómo se obtienen.

A continuación, para seguir introduciendo la unidad preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Te has fijado cómo son las torres de los castillos centroeuropeos? ¿Has visto cómo son los faros de nuestras costas? ¿Qué tipo de figuras son?*
- *¿Sabes a qué se refieren cuando se les llaman cuerpos "de revolución"?*

Finalmente, propondremos que busquen otros ejemplos concretos observando ciudades del mundo y edificios arquitectónicos de renombre.

Educamos en valores

Respeto por el material de trabajo

■ La representación gráfica de cuerpos redondos es un procedimiento matemático que se presta especialmente para compartir instrumentos de dibujo y de medida, ya sean colectivos o individuales.

A lo largo de la unidad didáctica se proponen actividades de medida y de dibujo que deben realizar en grupo o individualmente intercambiando diferentes herramientas.

Seguidamente se relacionan algunas de las actividades de la unidad que contribuyen a conseguir este objetivo:

– En las actividades 4 y 11 del tema el alumnado debe dibujar un cuerpo de revolución a partir de la figura plana que lo engendra en su giro.

– Utilización de los instrumentos de medida y dibujo necesarios para dibujar el desarrollo plano de una figura en las actividades 17 y 46.

Libro Digital

■ *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 215

Para empezar…

1. Las figuras planas son las siguientes:

a) Cuadrilátero paralelogramo rectángulo.

b) Triángulo equilátero.

c) Círculo.

2. Calculamos el área del rectángulo:

$$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = 3 \cdot 5 = 15 \ \text{cm}^2$$

3. Calculamos el área del triángulo:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27 \ \text{cm}^2$$

4. Calculamos el área del círculo:

$$\text{Área}_{\text{círculo}} = \pi \cdot 4^2 = 16\pi = 50,27 \ \text{cm}^2$$

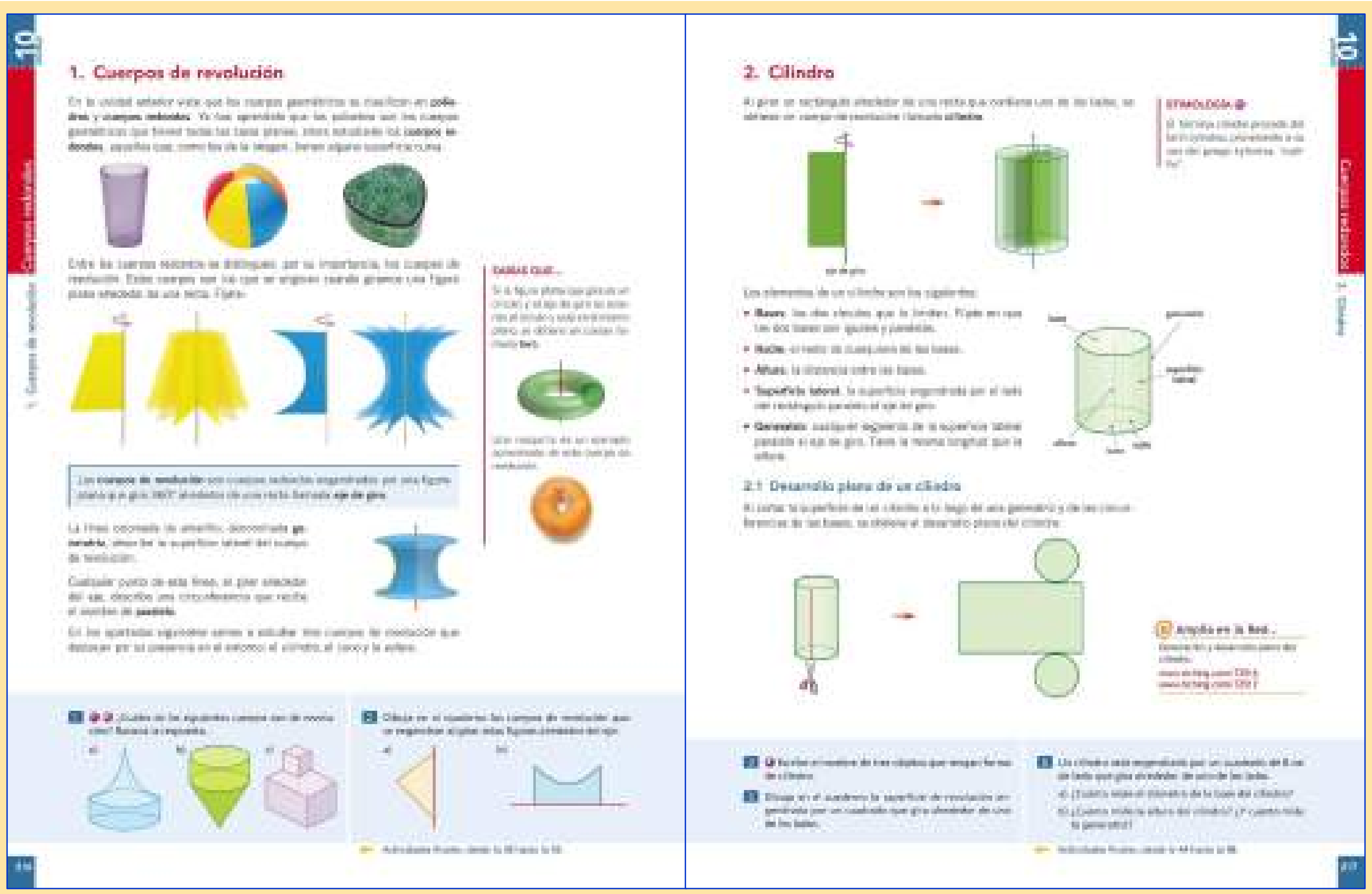
5. Hallamos la hipotenusa:

Hacemos uso para ello del teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 3^2 + 4^2$$

$$h^2 = 25$$

$$h = \sqrt{25} = 5$$



1. CUERPOS DE REVOLUCIÓN / 2. CILINDRO

■ El objetivo de esta sección consiste en introducir el concepto de cuerpo de revolución como tipo particular de cuerpo redondo.

En primer lugar leeremos la introducción del epígrafe 1 donde conoceremos la relación entre cuerpos redondos y cuerpos de revolución. Nos fijaremos en las imágenes que acompañan al texto y responderemos a las siguientes preguntas:

– *¿Qué caracteriza a los cuerpos redondos?¿Todas sus superficies son curvas?*

– *¿Todos los cuerpos de revolución son cuerpos redondos?¿Y al contrario?*

– *¿Cuáles de los tres ejemplos de cuerpos redondos son también cuerpos de revolución?*

■ A continuación leeremos la definición del recuadro sobre los cuerpos de revolución y los párrafos que siguen, donde encontraremos vocabulario característico de estas figuras:

– *¿Porqué la figura plana tiene que girar 360º para generar un cuerpo de revolución?*

– *¿Cómo se llama la línea que describe con su giro la superficie lateral del cuerpo de revolución?*

– *¿Puedes localizar la generatriz de los cuerpos de revolución de los ejemplos sobre la definición?*

A continuación prestaremos atención a la nota *SABÍAS QUE...*, y podremos comentar la generación del toro así como ejemplos de objetos cotidianos que tienen esta forma o similar.

■ Para afianzar todos estos conceptos introducidos, los alumnos y alumnas resolverán los ejercicios 1 y 2 de la página 216.

■ Leeremos la introducción del apartado sobre el cilindro y prestaremos especial atención a sus elementos. También a la nota del margen *ETIMOLOGÍA*. A continuación analizaremos las partes del cilindro y el texto leído:

– *¿Cuántas bases tiene el cilindro?¿Son siempre iguales?*

– *¿Qué elementos del cilindro son superficies y cuáles son rectas?*

– *¿Conoces otras palabras de uso cotidiano que procedan del griego? (p. ej.: teléfono, democracia, atmósfera, bacteria, polígono, etc.)*

Continuaremos conociendo el cilindro por medio del trabajo de las actividades 3, 4 y 5 de la página 217.

2.1 Desarrollo plano de un cilindro

■ Proseguiremos con la lectura de este subapartado, ampliando lo aprendido con *@Amplía en la red...*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 1*. Desarrollar la capacidad de expresar por escrito argumentos propios, así como trabajar la búsqueda, recopilación y procesamiento de información.
- *Etimología, pág. 217*. Usar el vocabulario adecuado y aprender sobre el origen etimológico de algunas palabras clave del tema.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 1*. Identificar y manejar las posibles respuestas, tomando decisiones de manera racional.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 3*. Afrontar los problemas siendo creativo, flexible en los planteamientos y perseverante en la solución, aplicando eficientemente los conocimientos adquiridos.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 3 servirá para continuar trabajando el concepto de desarrollo plano, en particular el de diferentes cilindros.

✓ En la actividad de ampliación 2 se plantea un problema para el cual, en primer lugar, es necesario dibujar un cuerpo de revolución a partir de una figura plana que gira sobre un eje.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos entrar en el siguiente enlace para trabajar el concepto de los cuerpos de revolución:

http://www.tiching.com/749502

En esta página web encontrarán un recurso didáctico creado con el aplicativo GeoGebra que les permitirá, de forma interactiva, comprobar por ellos mismos los conceptos que hemos explicado.

Pediremos a los alumnos que primero visualicen la animación del cilindro. A continuación podrán activar ellos mismos y ver qué ocurre al mover los vértices. Seguirán con otras figuras geométricas.

El material es muy útil ya que los alumnos podrán manipular la geometría y con ello experimentar de forma autónoma, superando la dificultad que supone los movimientos en el espacio.

Pueden intentarlo con otras figuras propuestas por ellos mismos y ver qué ocurre.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 216

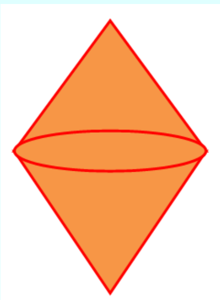
1. Son cuerpos de revolución:

a) y b)

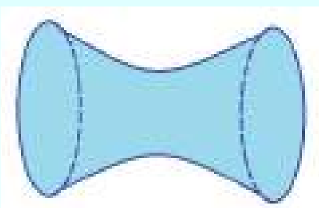
Porque están engendrados por una figura al girar 360º alrededor de un eje.

2. Los cuerpos de revolución generados son:

a)



b)

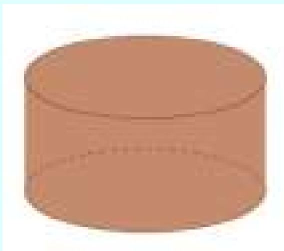


Página 217

3. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Tienen forma de cilindro un bote de conservas, un trozo de tubería y un depósito de agua.

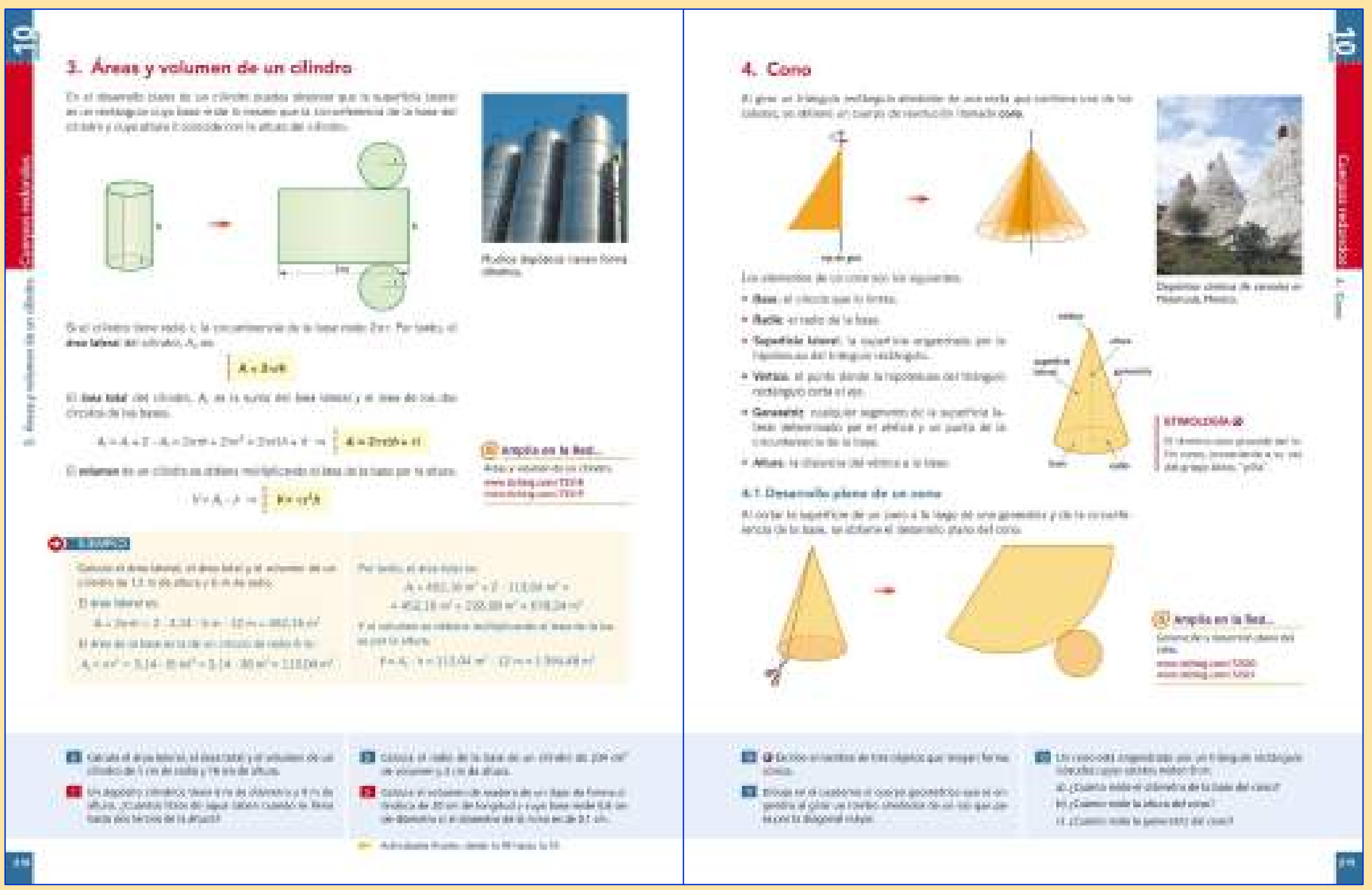
4. El cilindro dibujado deberá tener la misma altura que radio de sus bases:



5. Las soluciones son las siguientes:

a) El diámetro de la base mide 8 · 2 = 16 cm.

b) La altura del cilindro y la generatriz miden ambas 8cm, al igual que el lado del cuadrado.


3. Áreas y volumen de un cilindro

4. Cono

4.1 Desarrollo plano de un cono

3. ÁREAS Y VOLUMEN DE UN… / 4. CONO

■ El objetivo de la primera sección es continuar estudiando el cilindro, en particular el cálculo tanto de su área total como de su volumen.

Para empezar leeremos la primera parte de la sección, observando las imágenes que la acompañan:

– *¿Cuántas figuras planas conforman el desarrollo plano de un cilindro?¿Cómo se llaman?*

– *¿Puede tanar una de las bases un radio diferente a la otra?*

■ A continuación prestaremos atención a las fórmulas que nos permiten calcular el área y el volumen del cilindro, relacionando cada uno de sus elementos con su lugar en las representaciones superiores.

Seguidamente observaremos, pudiendo realizarlo de nuevo, el ejemplo resuelto bajo la teoría:

– *¿Qué datos necesitamos para calcular el área total de un cilindro?¿Y para calcular su volumen?*

– *¿En qué unidades se puede expresar el área de un cilindro?¿Y en cuáles su volumen?*

■ El alumnado realizará ahora las actividades de la página 218, donde tendrán que poner en práctica las expresiones de este apartado.

Para cerrar este apartado podemos trabajar en pequeños grupos con los recursos propuestos en *@Amplía en la red...*

■ Leeremos la introducción del apartado sobre el cono y posteriormente prestaremos atención a la terminología relacionada con sus elementos.

También podemos leer la nota del margen ETIMOLOGÍA, sobre el curioso origen de la palabra cono. A continuación responderemos a las siguientes preguntas:

– *¿Cuáles son los elementos del cono?¿Tiene los mismos elementos que el cilindro?¿En cuál difieren?*

– *¿Qué elementos del cilindro son superficies y cuáles son rectas?¿Y puntos?*

– *¿Conoces otras palabras de uso cotidiano que procedan del latín? (p. ej.: rosa, paz, padre, madre, obra, cuerpo, sano, etc.).*

Continuaremos trabajando el cono y sus elementos realizando las actividades de la página 219.

4.1 Desarrollo plano de un cono

■ Proseguiremos con la lectura de este subapartado observando el desarrollo del cono. Lo compararemos con el desarrollo del cilindro de la hoja anterior y verbalizaremos sus diferencia. Por último podremos ampliar lo aprendido con *@Amplía en la red...*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 7 y 9*. Leer e interpretar los enunciados de las actividades procesando los datos de manera ordenada.
- *Act. 10*. Desarrollar la capacidad de formular y expresar por escrito argumentos propios para responder la actividad.
- *Etimología, pág. 217*. Usar el vocabulario adecuado y aprender sobre el origen etimológico de algunas palabras clave del tema.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 7 y 9*. Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos para resolver la actividad.
- *Acts. 11 y 12*. Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de la actividad.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 10*. Ser capaz de proponer ejemplos siendo creativo y perseverante, mostrando criterio propio al buscar las respuestas.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 1 servirá para asentar los elementos característicos de un cono.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Podemos trabajar el desarrollo del área y el volumen de un cilindro accediendo a este enlace:

http://www.tiching.com/749504

El proyecto Descartes 2D ofrece diferentes recursos didácticos. En esta página los alumnos, siguiendo las instrucciones propuestas, completarán el proceso para obtener las fórmulas del área y el volumen del cilindro.

Les pediremos que realicen los cálculos en su cuaderno y a continuación podemos comentar en clase las características.

Tendremos en cuenta que al interactuar en la representación les puede ayudar a comprender las soluciones que obtengan.

Finalmente accederán al apartado de curiosidades para experimentar su demostración y responder la pregunta que se propone.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 218

6. El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2\cdot 3{,}14\cdot 5cm\cdot 16cm = 502{,}4\ cm^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14\cdot(5cm)^2 = 3{,}14\cdot 25cm^2 = 78{,}75\ cm^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b = 502{,}4\ cm^2 + 2\cdot 78{,}75\ cm^2 =$

$= 502{,}4\ cm^2 + 157{,}5\ cm^2 = 659{,}9\ cm^2$

El volumen es:

$V = A_b\cdot h = 78{,}75\ cm^2\cdot 16\ cm = 1260\ cm^3$

7. El diámetro mide 6 m, su radio mide 3 m, dos tercios de la altura es $\frac{2}{3}\cdot 9 = 6$ m, y 1 litro es 1 dm^3.

Calculamos el volumen de un cilindro de radio 3 m y altura 6 m:

$V = A_b\cdot h = \pi r^2\cdot h \simeq 3{,}14\cdot(3m)^2\cdot 6m = 3{,}14\cdot 9m^2\cdot 6m =$

$= 169{,}56\ m^3 = 169560\ dm^3$

Caben 169560 litros de agua.

8. Utilizamos la fórmula del volumen y despejamos el radio:

$V = A_b\cdot h = \pi r^2\cdot h \Rightarrow 234 = 3{,}14\cdot r^2\cdot 2 \Rightarrow 234 = 6{,}28\cdot r^2$

$\Rightarrow r^2 = 234:6{,}28 \simeq 37{,}26 \Rightarrow r = \sqrt{37{,}26} \simeq 6{,}1cm$

El radio mide 6,1 cm.

9. Calculamos el volumen del lápiz, después el volumen de la mina y finalmente restamos ambos volúmenes:

Calculamos el volumen del lápiz:

$V = A_b\cdot h = \pi r^2\cdot h \simeq 3{,}14\cdot(0{,}3cm)^2\cdot 20cm =$

$= 3{,}14\cdot 1{,}8cm^3 = 5{,}652cm^3$

Calculamos el volumen de la mina:

$V = A_b\cdot h = \pi r^2\cdot h \simeq 3{,}14\cdot(0{,}05cm)^2\cdot 20cm =$

$= 3{,}14\cdot 0{,}05cm^3 = 0{,}157cm^3$

El volumen de madera es:

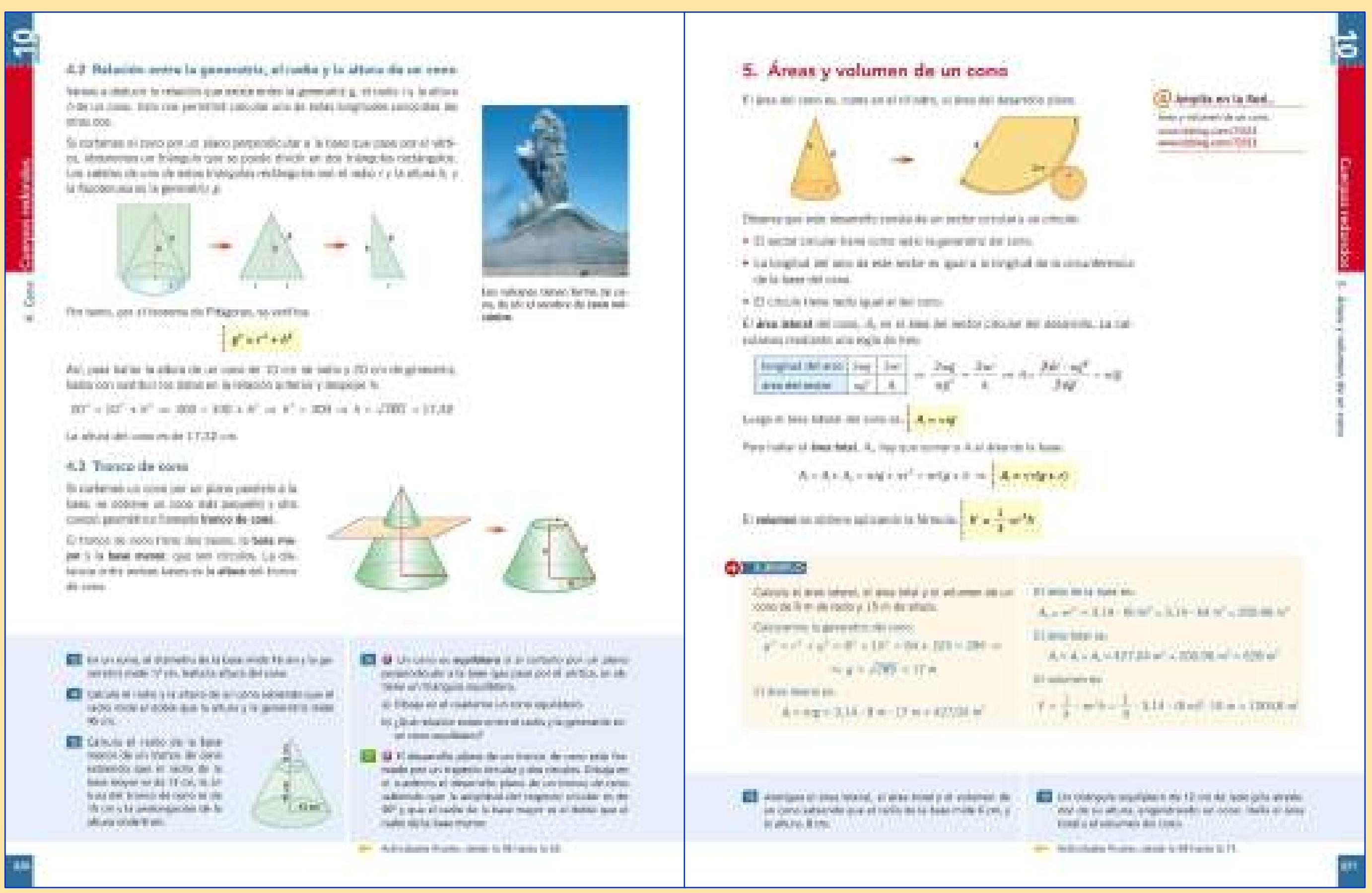
$5{,}652cm^3 - 0{,}157cm^3 = 5{,}495\ cm^3$

Página 219

10. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Tienen forma cónica un cucurucho de helado, un embudo y algunos volcanes.

(Continúa en la página 10-29 de la guía)



4. CONO (CONT) / 5. ÁREAS Y VOLUMEN DE...

4.2 Relación entre la generatriz, el radio y la altura de un cono

■ Leeremos el texto de este apartado en el que se deduce la relación entre estos tres elementos del cono.

Después de haber observado la expresión que relaciona estas tres dimensiones, radio, altura y cono, podemos responder a las siguientes preguntas:

– *¿Cuántos datos necesitamos para calcular la generatriz de un cono?*
– *¿De los elementos del cono, cuáles son los catetos y cuál la hipotenusa, en esta relación?*
– *¿Cómo he de calcular el radio de un cono conocidas las longitudes de la generatriz y la altura?¿Y el diámetro?*

■ Nos fijaremos a continuación en la imagen del margen que comentaremos con los alumnos y alumnas:

– *¿Podéis pensar en otros elementos de la naturaleza que tengan forma de cono?*
– *¿Conocéis el nombre de algún volcán?¿Dónde se encuentra? (p. ej.: el Teide situado en la Isla de Tenerife; el Etna en Sicilia, Italia; el Vesubio en Nápoles, Italia; el Hekla en Islandia).*

■ Para afianzar los contenidos dados propondremos la realización de las actividades 13, 14 y 16 de la página 220.

4.3 Tronco de cono

■ El alumnado leerá el texto del siguiente apartado y después observaremos la imagen que lo acompaña:

– *¿Cuántas bases tiene un tronco de cono?¿Pueden ser iguales?*
– *¿Imaginas como podría ser el desarrollo plano de un tronco de cono?*

Posteriormente realizaremos las actividades 15 y 17 de la página 220.

■ Empezamos a trabajar el apartado 5 observando las imágenes y planteando las siguientes preguntas:

– *¿Cuántas figuras planas conforman el desarrollo plano de un cilindro?¿Cómo se llaman?*

A continuación prestaremos atención las fórmulas que nos permiten calcular el área y el volumen del cono, relacionando cada uno de sus elementos con su lugar en las representaciones superiores.

Seguidamente observaremos, el ejemplo y realizaremos las actividades de la página 221. Cerraremos este apartado con los recursos de *@Amplía en la red...*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 15, 16 y 17*. Leer, comprender e interpretar los enunciados de los problemas propuestos para poder resolverlos.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 15 y 17*. Aplicar el proceso aprendido para hallar ciertas medidas en un cuerpo geométrico, de forma repetitiva para mejorar la eficacia en su resolución.

■ *Acts. 18 y 19.* Aplicar los nuevos conocimientos adquiridos a situaciones parecidas propuestas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 16*. Identificar, en la realización de la actividad, las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

■ *Act. 17.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre el desarrollo plano de los cuerpos geométricos.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 2 nos permitirá continuar trabajando el cálculo del volumen de un cono.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para seguir practicando los cuerpos de revolución, proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749505

El proyecto Gauss contiene actividades interactivas para que los alumnos practiquen y se familiaricen con la construcción del cono y obtengan algunos datos.

A continuación, ejecutarán las instrucciones y tendrán que resolver las preguntas que se les indican.

Podemos realizarlo en el aula, generando un debate, para que puedan descubrir las relaciones entre radio, altura y generatriz y fijarse en lo más destacable.

Al terminar, preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Puedes explicar con tus palabras qué es la generatriz en un cuerpo de revolución??*
- *¿Por qué recibe este nombre? ¿Qué relación hay respecto a la figura plana de referencia?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 220

13. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 17^2 = h^2 + 8^2 \Rightarrow 289 = h^2 + 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 225 \Rightarrow h = \sqrt{225} = 15$ cm

La altura del cono es de 15 cm.

14. Aplicamos el teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta que si h es la altura del cono, su radio es 2h:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 45^2 = h^2 + (2h)^2 \Rightarrow 2025 = h^2 + 4h^2 = 5h^2$

$\Rightarrow h^2 = 2025{:}5 = 405 \Rightarrow h = \sqrt{405} \simeq 20{,}12$ cm

La altura es 20,12 cm y el radio 2 · 20,12 = 40,24 cm

15. Tenemos dos triángulos en posición de Tales (semejantes), y por tanto de lados proporcionales:

$\frac{15+9}{13} = \frac{9}{r} \Rightarrow 24r = 117 \Rightarrow r = 117 : 24 = 4{,}875$ cm

El radio de la base menor mide 4,875 cm.

16. Las soluciones son las siguientes:

a) 

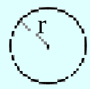
b) El diámetro de la base es igual a la generatriz, por tanto, el radio es la mitad de la generatriz.

17. Actividad personal. A modo de ejemplo:

1) Comenzamos escogiendo un radio para la base menor, por ejemplo r = 3 cm, y la dibujamos:

Su perímetro será:

$2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ cm

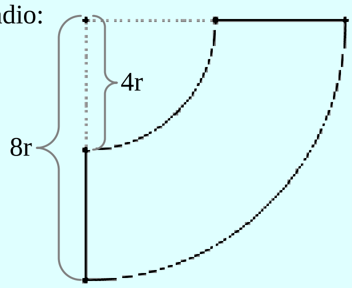


2) Esta medida del perímetro coincidirá con la longitud del arco menor del trapecio circular. Para poder dibujarlo calculamos el radio:

Al ser la amplitud del trapecio circular de 90º:

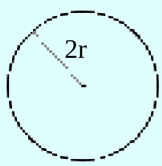
$6\pi \cdot 4 = 24\pi$ cm

$\frac{24\pi}{2\pi} = 12$ cm

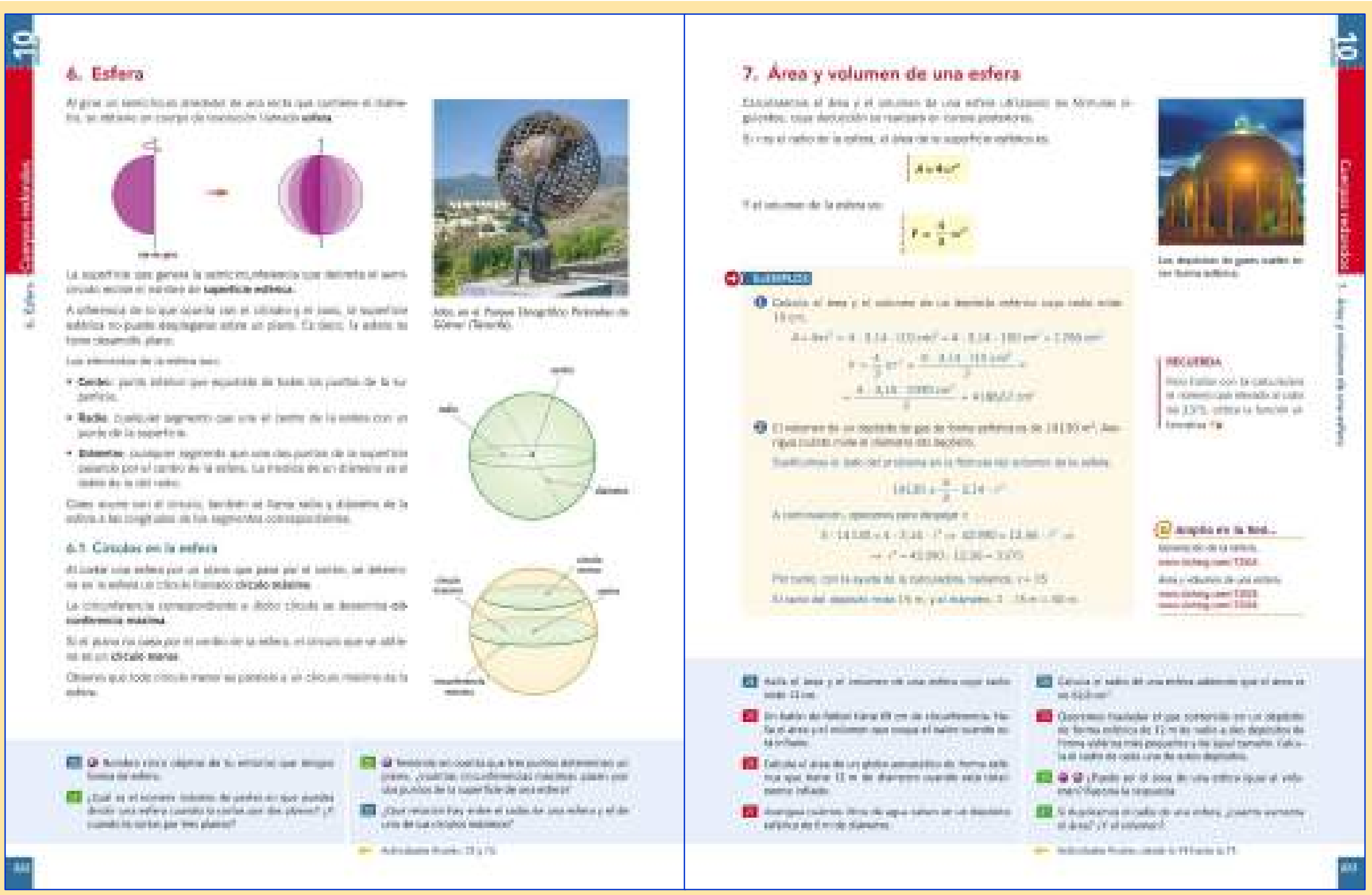


3) Para dibujar el arco mayor del trapecio circular, alargamos el radio, haciéndolo justo del doble de longitud del anterior, para que la medida del arco sea también el doble.

4) Por último podemos dibujar la circunferencia de la base mayor (de 2 · 3 cm = 6 cm).



(Continúa en la página 10-29 de la guía)



6. ESFERA / 7. ÁREA Y VOLUMEN DE UNA...

■ Para empezar esta sección leeremos la introducción, observando las imágenes atentamente, y proseguiremos con la lectura de los elementos de la esfera, identificándolos en la imagen de la derecha:

– *¿Cuáles son las diferencias entre la esfera y el cilindro, y entre la esfera y el cono?*
– *¿Cómo es el desarrollo plano de la esfera?*
– *¿El radio de una esfera es un segmento o es una longitud?*

Para cerrar esta primera parte de la sección podemos proponer al alumnado la realización por grupos de la actividad 20 de la página 222.

6.1 Círculos en la esfera

■ Procederemos a la lectura de este subapartado, observando la imagen que lo acompaña. A continuación podemos proponer las siguientes cuestiones:

– *¿Qué diferencia hay entre el círculo máximo y la circunferencia máxima?*
– *¿Y entre el círculo máximo y el círculo menor?*

Lanzaremos al alumnado el reto de encontrar circunferencias máximas en el globo terráqueo de la fotografía que representa a Atlas.

■ El alumnado realizará ahora las actividades 21, 22 y 23 de la página 222, donde tendrán que reflexionar sobre los elementos de la esfera estudiados.

■ El objetivo de la sección 7 es continuar estudiando la esfera, en particular el cálculo tanto de su área como de su volumen.

Para empezar leeremos la primera parte de la sección, prestando especial atención a las fórmulas que nos permiten calcular el área y el volumen de la esfera, relacionando cada uno de sus elementos con su lugar en las representaciones de la página anterior.

– *¿Cuántos datos y cuáles se necesitan para calcular el área o el volumen de una esfera?*
– *¿Qué relación que hay entre la expresión del área del círculo y la del área de la esfera?*

■ Seguidamente observaremos y comentaremos juntos los ejemplos resueltos bajo la teoría.

Aprovecharemos para comentar cómo calcular la raiz cúbica de un número dado apoyándonos en la explicación de la anotación de la derecha: *RECUERDA.*

■ Para cerrar este apartado propondremos la realización de las actividades de la página 223.

Por último podremos ampliar lo aprendido con los tres recursos en línea que nos propone el apartado *@Amplía en la red...*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 30.* Expresar e interpretar de forma escrita los conocimientos adquiridos sobre la esfera, argumentando la respuesta.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 24 a 29*. Reconocer y asimilar los procedimientos y ser capaz de reproducirlos y aplicarlos.
- *Act. 30*. Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 20.* Trabajar la confianza en uno mismo y el espíritu de superación, siendo creativo e imaginativo para encontrar las repuestas a los interrogantes que se plantean.
- *Act. 22*. Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 4 servirá para revisar los elementos de la esfera estudiados y recordarlos de manera más eficaz por medio del dibujo.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Naveguemos por Tiching

– Para asimilar y practicar los conceptos sobre la esfera, podemos acceder a este enlace:

http://www.tiching.com/749506

El proyecto Gauss ofrece actividades interactivas para que los alumnos practiquen y se familiaricen con la esfera. Concretamente, la actividad “La Tierra en siete días” contiene diferentes propuestas que giran en torno a ella.

Podemos sugerir que realicen la última en la que podrán comprobar cómo se halló el radio de la Tierra y hacer cálculos sobre distintas ciudades en ella.

Al terminar, preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Con qué crees que puedes tener más exactitud, con un mapa o con un globo terráqueo? ¿Por qué?*
- *¿Qué ocurre con las representaciones planas de la esfera terrestre?*
- *Investigad en grupo qué utilizan los cartógrafos para construir mapas y un recurso muy actual. También las más utilizadas.*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 222

20. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Tienen forma esférica una pelota, la luna, el sol, una burbuja de jabón y una naranja.

21. Las respuestas son las siguientes:

Cuando la cortas por dos planos el número máximo son 4 partes.

Cuando la cortas por tres planos el número máximo son 8 partes.

22. Sólo pasa una circunferencia máxima, pues el tercer punto que la determina es el centro de la esfera.

23. El radio es el mismo.

Página 223

24. Hallamos el área:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4\cdot 3{,}14\cdot(12\text{cm})^2 = 4\cdot 3{,}14\cdot 144\text{cm}^2 =$

$= 1808{,}64\ \text{cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(12\text{cm})^3}{3} = 7234{,}56\ \text{cm}^3$$

25. Utilizamos la formula de la longitud de la circunferencia para calcular el radio r:

$l = 2\pi r \Rightarrow 69 = 2\cdot 3{,}14\cdot r \Rightarrow r = 69:6{,}24 \simeq 11{,}06$ cm

El área del balón inflado (esfera) es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4\cdot 3{,}14\cdot(11{,}06\text{cm})^2 = 4\cdot 3{,}14\cdot 122{,}32\text{cm}^2 =$

$= 1536{,}34\ \text{cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(11{,}06\text{cm})^3}{3} = 5664{,}14\ \text{cm}^3$$

26. El radio mide 6 m, y por tanto el área es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4\cdot 3{,}14\cdot(6\text{cm})^2 = 4\cdot 3{,}14\cdot 36\text{cm}^2 = 452{,}16\ \text{m}^2$

27. El radio mide 3 m, y por tanto el volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(3\text{m})^3}{3} = 113{,}04\ \text{m}^3 = 113\ 040\ \text{dm}^3$$

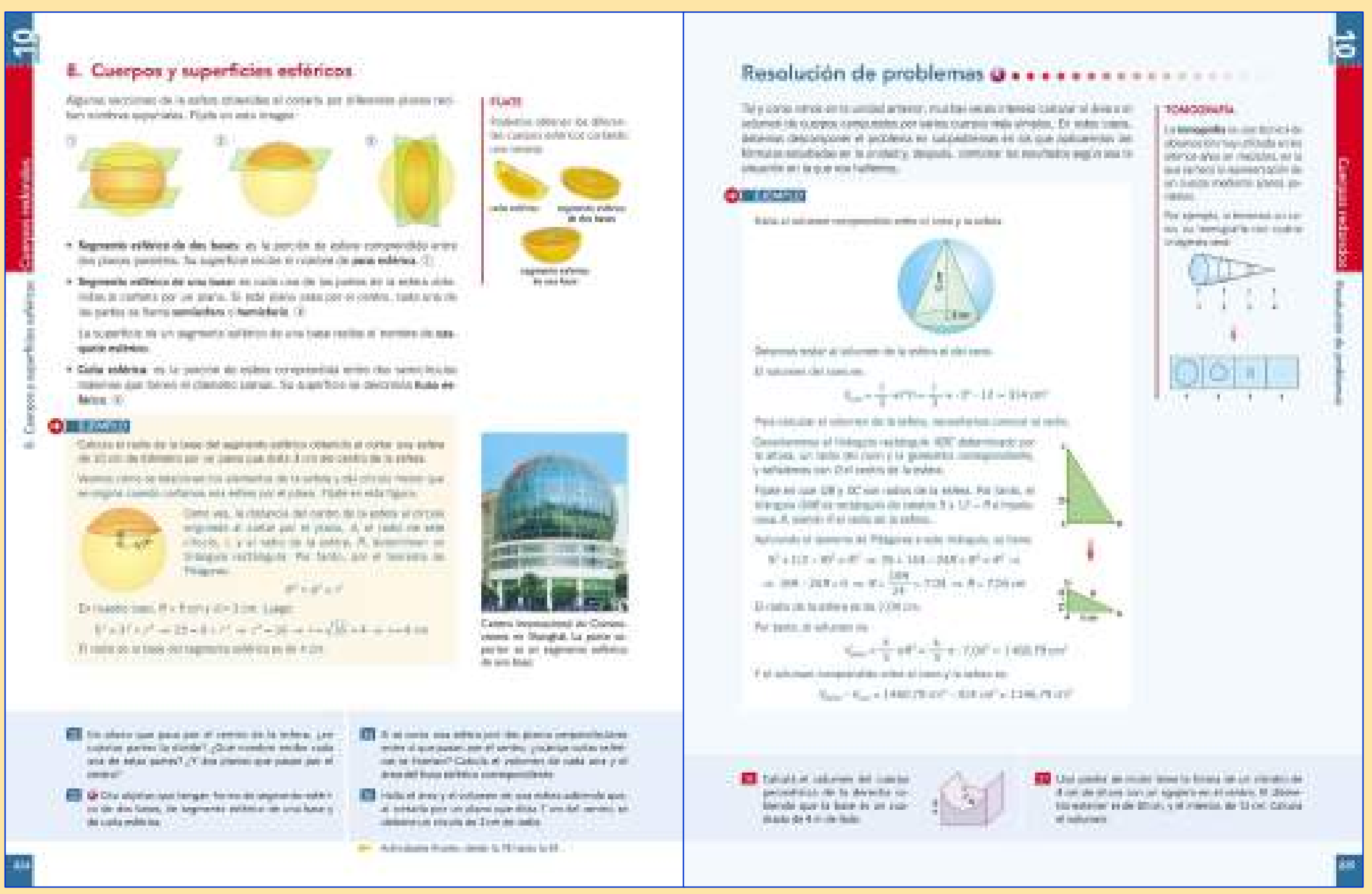
Caben 113 040 litros de agua.

28. Utilizamos la fórmula del área de la esfera y despejamos el radio:

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow 62{,}8 = 4\cdot 3{,}14\cdot r^2 \Rightarrow r^2 = 5 \Rightarrow r = 2{,}24$ cm

El radio mide 2,24 cm.

(Continúa en la página 10-30 de la guía)



8. CUERPOS Y SUP. ESFÉRICOS / RESOLUCIÓN...

■ Leeremos el texto de este apartado, fijándonos en las imágenes.

A continuación podemos realizar en común la actividad 33 y posteriormente dibujar algunos de los objetos que se hayan citado.

■ Después examinaremos la anotación del margen derecho *FÍJATE* y realizaremos las siguientes preguntas:

– *¿Podemos extraer todos esos cuerpos de la misma naranja?*

– *¿De qué otras frutas podríamos extraer los diferentes cuerpos esféricos?*

■ Nos fijaremos en el ejercicio resuelto que podemos encontrar después de la teoría y que podremos utilizar como ejemplo para realizar alguna de las actividades que se proponen en la página.

Para afianzar todos estos conceptos introducidos, los alumnos y alumnas resolverán los ejercicios 32, 34 y 35 de la página 224.

■ Como actividad opcional, y tras fijarnos en la fotografía del Centro Internacional de Convenciones de Shanghái, podemos proponer al alumnado la búsqueda de otros ejemplos de edificios cuya forma se base en la esfera.

■ El objetivo de la siguiente sección consiste en continuar el trabajo comenzado en la unidad anterior sobre el uso de la estrategia de la descomposición de un problema en varios más sencillos, siempre interesante en el caso de problemas geométricos complejos.

En primer lugar leeremos la introducción y revisaremos la resolución del ejercicio de ejemplo, fijándonos particularmente en los croquis realizados y en las fórmulas empleadas:

– *¿Qué fórmulas se han empleado para su resolución?*

– *¿Qué teorema se pone en práctica para calcular datos necesarios para resolver el problema?¿Se ha empleado más veces a lo largo del tema?*

■ Para poner en práctica esta estrategia de resolución de problemas podemos realizar individualmente o en pequeños grupos las actividades que se proponen en la página 225.

■ Para cerrar esta sección nos fijaremos en la anotación de la derecha de la página: *TOMOGRAFÍA*.

En el ejemplo podemos observar la tomografía de un cono por medio de cuatro de sus secciones. Podemos proponer al alumnado representar otras figuras siguiendo la línea del ejemplo. Por ejemplo la tomografía de un cilindro en diferentes posiciones o de una esfera.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 32 y 34.* Leer e interpretar los enunciados procesando los datos de manera ordenada.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 34 y 35*. Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia en el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos esféricos.
- *Acts. 36 y 37*. Aplicar los nuevos conocimientos adquiridos a situaciones parecidas propuestas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 33*. Ser capaz de proponer ejemplos siendo creativo, flexible y perseverante al buscar las respuestas.
- *Resolución de problemas, pág. 225*. Observar el planteamiento y resolución de problemas, identificando las estrategias utilizadas y el orden de las operaciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 5 consolidará el aprendizaje de los cuerpos esféricos trabajados en la unidad.

✓ La actividad de ampliación 3 exige poner en práctica los conocimientos adquiridos sobre la esfera y los cuerpos esféricos.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para ampliar y comprobar la aplicación de este cuerpo de revolución, proponemos el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749507

Nuestros alumnos podrán observar y visualizar esta construcción singular en la isla griega de Cleopatra. Se trata de aplicar la geometría a la arquitectura sostenible.

Después de observar detenidamente les preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿En qué cuerpo redondo se ha proyectado ésta vivenda? ¿Hay otros cuerpos esféricos?*
- *¿Qué ventajas se obtienen al usar esta figura geométrica para construir una casa sostenible?*
- *¿Cómo se distribuye el espacio interior? ¿Cómo se organiza la fachada? ¿Podrías calcular la superficie?*

También les podemos sugerir que entren en la página oficial del arquitecto Luis Garrido para ampliar imágenes o ver el proceso constructivo.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 224

32. Un plano que pasa por el centro de la esfera la divide en dos partes, que reciben el nombre de semiesfera o hemisferio.

Dos planos que pasan por el centro de la esfera la dividen en cuatro partes.

33. Actividad personal. A modo de ejemplo:

– Tienen forma de segmento esférico de dos bases: un jarrón, un vaso, un cuenco...

– Tienen forma de segmento esférico de una base: un trozo de fruta, un gorro de natación, la cabeza de una chincheta, una cúpula...

– Tienen forma de cuña esférica: un gajo de naranja, una tajada de melón, un ajo, la pupila de los cocodrilos y en el corte realizado a la maqueta de una célula animal para mostrar su interior.

34. Se forman cuatro cuñas esféricas:

El volumen de cada cuña esférica es la cuarta parte del volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 : 4 = \frac{1}{3}\pi r^3$$

El área de cada cuña esférica es la cuarta parte del área de la esfera:

$A = 4\pi r^2 : 4 = \pi r^2$

35. Calculamos el radio r de la esfera teniendo en cuenta que, la distancia del centro de la esfera al círculo, el radio de este círculo y el radio de la esfera determinan un triángulo rectángulo. Por tanto, por el teorema de Pitágoras:

$r^2 = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58 \Rightarrow r = \sqrt{58} \simeq 7{,}62$ cm

El área de la esfera es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4{\cdot}3{,}14{\cdot}(7{,}62\text{cm})^2 = 4{\cdot}3{,}14{\cdot}58{,}06\text{cm}^2 =$

$= 729{,}23\ \text{cm}^2$

El volumen es:

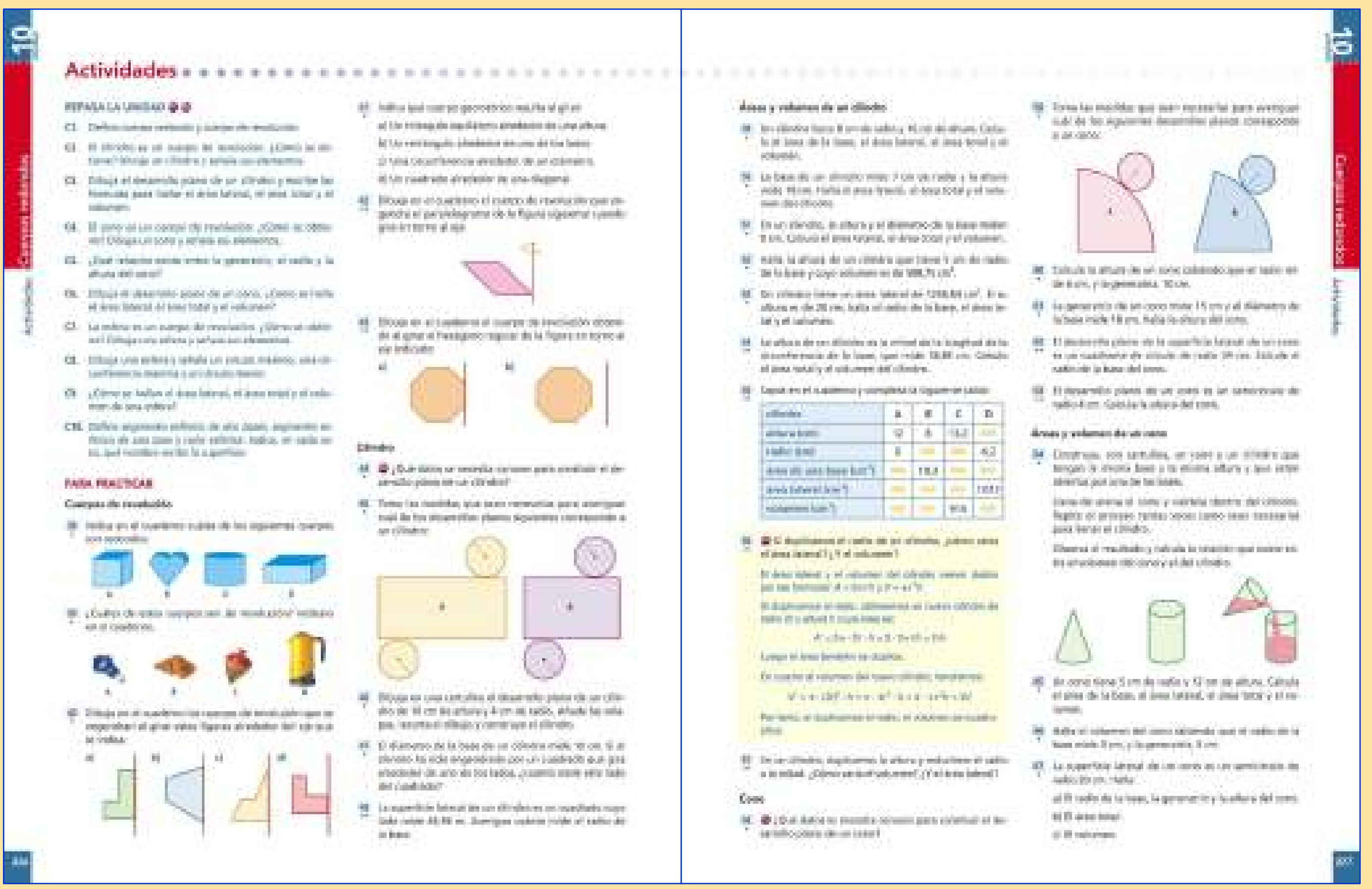
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(7{,}62\text{cm})^3}{3} = 1852{,}39\ \text{cm}^3$$

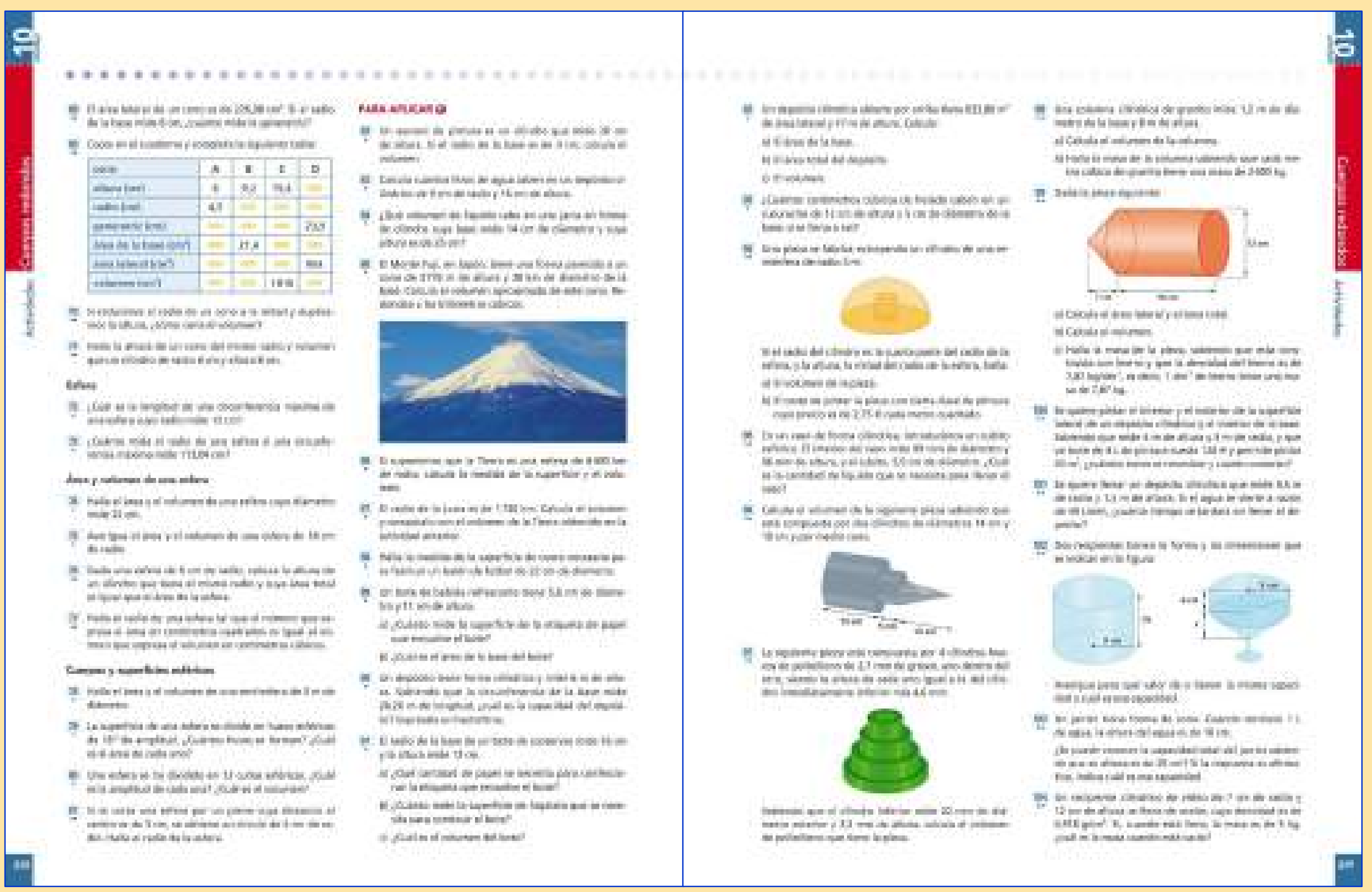
Página 225

36. Debemos restar al volumen de un cubo de arista 4 m, el volumen de la mitad de un cilindro de altura 4 m y radio de la base 2m:

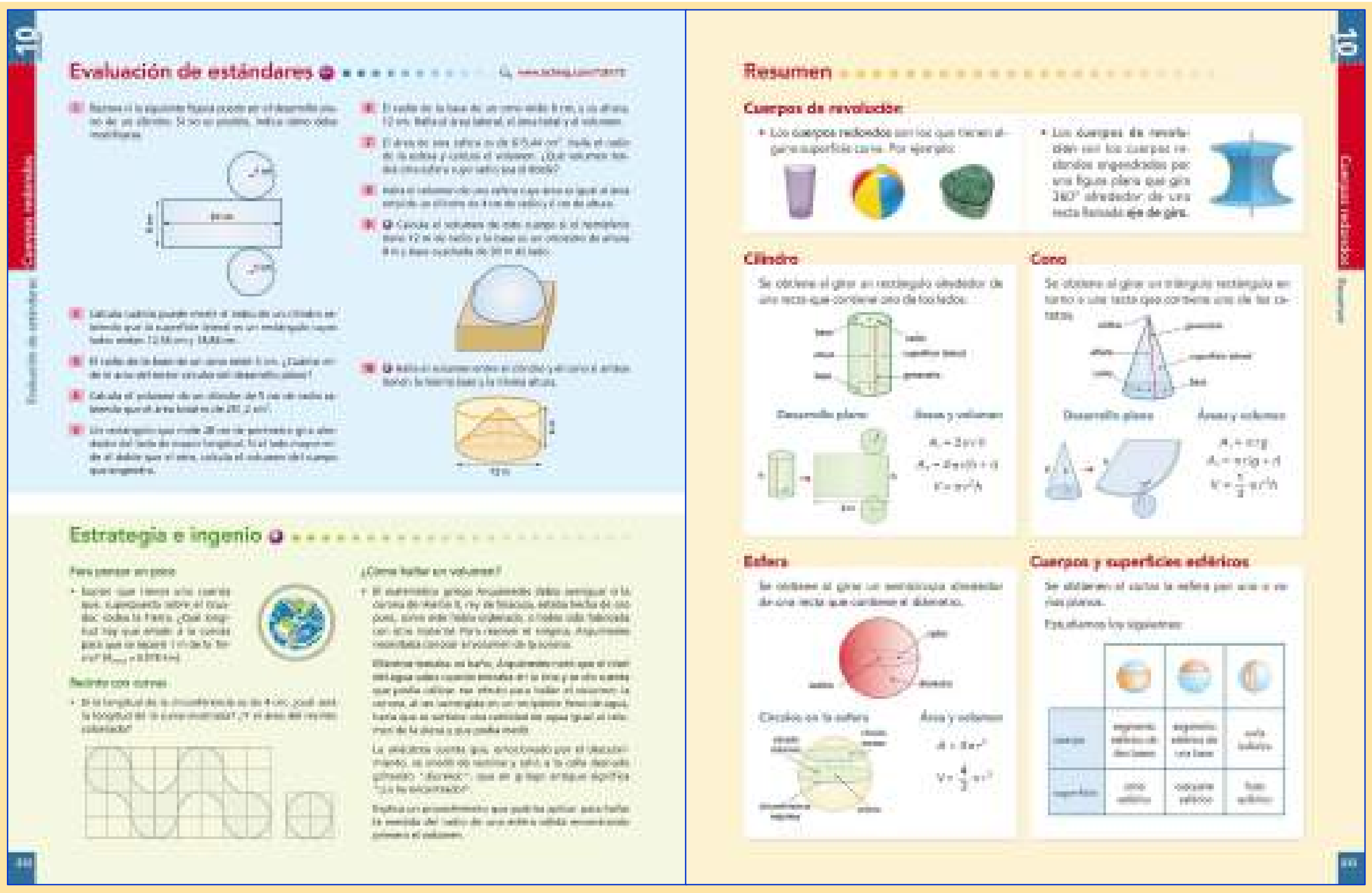
$$V = V_{cubo} - \frac{1}{2}V_{cilindro} = 64\ \text{m}^3 - 25{,}12\ \text{m}^3 = 38{,}88\ \text{m}^3$$

(Continúa en la página 10-30 de la guía)


Actividades




Desarrolla tus competencias


Evaluación de estándares
Estrategia e ingenio
Resumen
Cuerpos de revolución
Cilindro
Cono
Esfera
Cuerpos y superficies esféricos

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Repasa la unidad, pág. 226*. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y adecuado a los contenidos dados.

■ *Act. 105.* Formular y expresar argumentos propios de manera convincente y adecuada al contexto para explicar y justificar la respuesta dada.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 231.* Leer y comprender el estímulo y los enunciados de la actividad, generando ideas y supuestos.

APRENDER A APRENDER

■ *Repasa la unidad*, *pág. 226* Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio, así como ser consciente de las propias capacidades y carencias.

■ *Acts. 44, 58 y 105.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.

■ *Acts. 56, 106 y 111.* Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 231.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.

■ *Evaluación de estándares, pág. 232*. Ser consciente de las propias capacidades en el tema estudiado.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Para aplicar, pág. 228.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar solucio-nes, evaluando las acciones realizadas.

■ *Acts. 108, 109, 110, 113, 114 y 115.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos ad-quiridos a lo largo de la unidad, mostrando criterio propio.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 231. Estrategia e ingenio, pág. 232.* Buscar las soluciones de forma creativa e imaginativa, mostrando motivación y autonomía en la toma de decisiones.

■ *Evaluación de estándares, pág. 232*. *Acts. 9 y 10*. Ser consciente de las propias capacidades en el tema estudiado.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 231. Act. 115.* Buscar, seleccionar y manejar información en Internet.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Act. 105.* Manejar las habilidades sociales al exponer un trabajo delante de los compañeros.

ACTIVIDADES FINALES

■ En la sección de *Actividades* el alumnado se enfrentará a una colección de ejercicios en orden creciente de dificultad, con el fin de afianzar todos los contenidos del tema, desde un punto de vista práctico y teórico.

■ La sección *Desarrolla…* persigue fomentar la autonomía del alumnado y la utilización de distintos recursos para resolver un planteamiento dado. A través de un caso práctico, el alumno ejercitará su capacidad de análisis y su actitud proactiva en la búsqueda de solu-ciones, además de poner en práctica los conocimientos adquiridos durante la unidad didáctica.

■ Con la sección de *Evaluación…* se pretende que los alumnos y alumnas valoren el nivel de conocimientos alcanzados. Propone una serie de actividades que repasan la unidad de un modo completo y práctico.

■ La sección *Estrategia…* propone una serie de acertijos relacionados con los conceptos trabajados durante el tema, con el fin de que el alumnado desarrolle su imaginación y adquiera destreza relacionando ideas.

■ La finalidad de la sección *Resumen* es recopilar los contenidos fundamentales de la unidad en un mapa conceptual que resuma y destaque las relaciones entre los concep-tos y los procedimientos estudiados.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

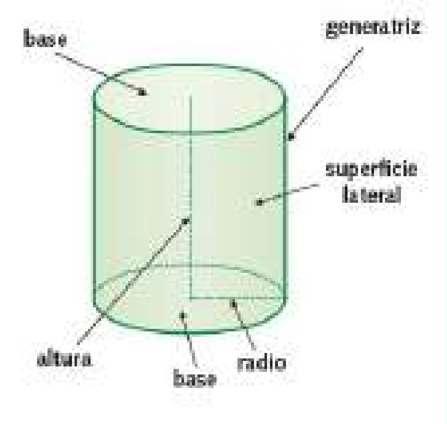
Página 226

C1. Un cuerpo redondo es el cuerpo geométrico que tiene alguna superficie curva.

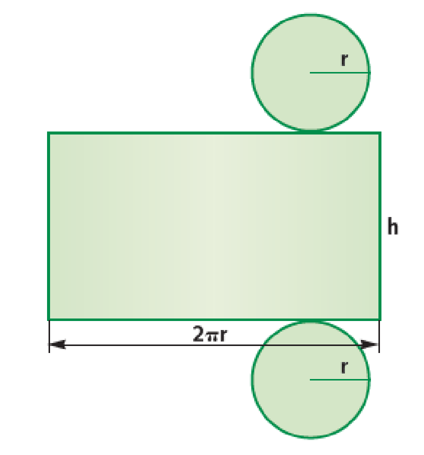
Un cuerpo de revolución es un cuerpo redondo engen-drado por una figura plana que gira 360º alrededor de una recta llamada eje de giro.

C2. Un cilindro se obtiene al girar un rectángulo alrededor de una recta que contiene uno de los lados.

Dibujamos un cilindro y señalamos sus elementos:



C3. El desarrollo plano de un cilindro es:



La fórmula del área lateral es: $A_l = 2\pi rh$

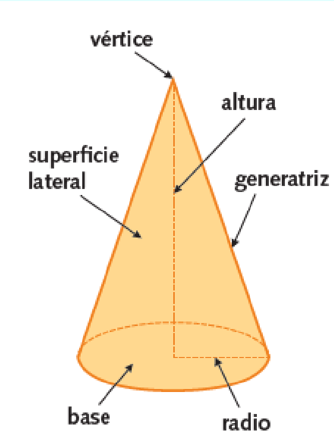
La fórmula del área total es:

$A_t = A_l + 2A_b$, donde $A_b = \pi r^2$ es el área de la base.

La fórmula del volumen es: $V = A_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h$

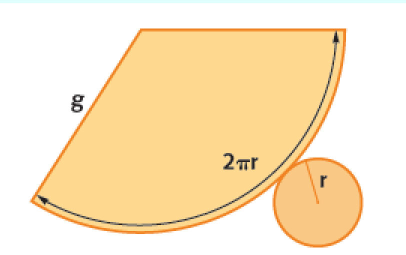
C4. Un cono se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de una recta que contiene uno de los catetos.

Dibujamos un cono y señalamos sus elementos:



C5. Cumplen el teorema de Pitágoras: $g^2 = h^2 + r^2$, donde g es la generatriz, h la altura y r el radio.

C6. El desarrollo plano de un cono es:



La fórmula del área lateral es: $A_l = \pi rg$

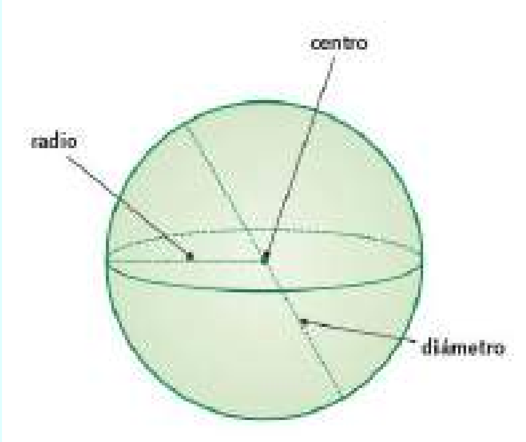
La fórmula del área total es:

$A_t = A_l + A_b$, donde $A_b = \pi r^2$ es el área de la base.

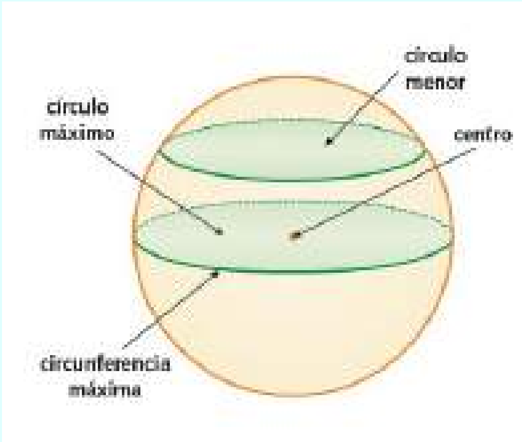
La fórmula del volumen es: $V = \dfrac{1}{3} A_b \cdot h = \dfrac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

C7. Una esfera se obtiene al girar un semicírculo alrededor de una recta que contiene el diámetro.

Dibujamos una esfera y señalamos sus elementos:



C8. Dibujamos una esfera con los posibles círculos en ella:



C9. A diferencia de el caso del cilindro o el del cono, la esfera sólo tiene una superficie, cuya área se calcula de la siguiente forma:

La fórmula del área es: $A = 4\pi r^2$

La fórmula del volumen es: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

C10. *Segmento esférico de dos bases*: es la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos. Su superficie recibe el nombre de zona esférica.

Segmento esférico de una base: es cada una de las partes de la esfera obtenidas al cortarla por un plano. Si este plano pasa por el centro, cada una de las partes se llama semiesfera o hemisferio. La superficie de un segmento esférico de una base recibe el nombre de casquete esférico.

Cuña esférica: es la porción de esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que tienen el diámetro común. Su superficie se denomina huso esférico.

38. Los cuerpos redondos son el B y el C.

39. Los cuerpos de revolución son el A y el C.

40. Los cuerpos de revolución que se engendran son:

a) 

b) 

c) 

b) 

41. Los cuerpos geométricos resultantes son los siguientes:

a) Un cono.

b) Un cilindro.

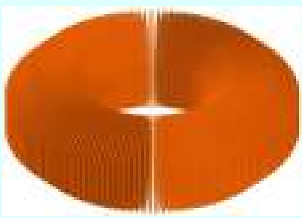
c) Una esfera.

d) Dos conos pegados por las bases.

42. El cuerpo de revolución sería el siguiente:

43. Girando los hexágonos obtendríamos:

a) 

b) 

44. La altura del cilindro y el radio de la base.

45. Medimos el radio r de las bases y comprobamos si las bases de los rectángulos miden $2\pi r$.

El único desarrollo que lo cumple es A: r = 0,9 cm y $2\pi r$ = 5,65 cm.

46. Actividad personal.

47. El lado mide lo mismo que el radio de la base, por tanto el lado del cuadrado mide 5 cm.

48. El lado del cuadrado es $2\pi r$, por tanto:

$43{,}96 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \Rightarrow r = 43{,}96 : 6{,}28 = 7$ m

El radio mide 7 m.

Página 227

49. El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8\text{cm} \cdot 16\text{cm} = 803{,}84\ \text{cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (8\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 64\text{cm}^2 = 200{,}96\ \text{cm}^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b =$

$= 803{,}84\ \text{cm}^2 + 2 \cdot 200{,}96\ \text{cm}^2 = 1205{,}76\ \text{cm}^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 200{,}96\ \text{cm}^2 \cdot 16\ \text{cm} = 3215{,}36\ \text{cm}^3$

50. El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7\text{cm} \cdot 18\text{cm} = 791{,}28\ \text{cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (7\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 49\text{cm}^2 = 153{,}86\ \text{cm}^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b =$

$= 791{,}28\ \text{cm}^2 + 2 \cdot 153{,}86\ \text{cm}^2 = 1099\ \text{cm}^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 153{,}86\ \text{cm}^2 \cdot 18\ \text{cm} = 2769{,}48\ \text{cm}^3$

51. Si el diámetro mide 8 cm, el radio r mide 4 cm. Por tanto:

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4\text{cm} \cdot 8\text{cm} = 200{,}96\ \text{cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 16\text{cm}^2 = 50{,}24\ \text{cm}^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b =$

$= 200{,}96\ \text{cm}^2 + 2 \cdot 50{,}24\ \text{cm}^2 = 301{,}44\ \text{cm}^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 50{,}24\text{cm}^2 \cdot 8\ \text{cm} = 401{,}92\ \text{cm}^3$

52. Utilizamos la fórmula del volumen y despejamos la altura:

$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow 588{,}75 = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 588{,}75 : 78{,}5 = 7{,}5$ cm

La altura mide 7,5 cm.

53. Utilizamos la fórmula del área lateral y despejamos el radio:

$A_l = 2\pi rh \Rightarrow 1256{,}64 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \cdot 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 1256{,}64 : 125{,}6 = 10$ cm

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (10cm)^2 = 3{,}14 \cdot 100\ cm^2 = 314\ cm^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b =$

$= 1256{,}64\ cm^2 + 2 \cdot 314\ cm^2 = 1884{,}64\ cm^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 314\ cm^2 \cdot 20\ cm = 6280\ cm^3$

54. Resolvemos:

La altura mide 18,84 : 2 = 9,42 cm

La longitud de la circunferencia de la base es $2\pi r$, por tanto:

$18{,}84 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \Rightarrow r = 18{,}84 : 6{,}28 = 3$ cm

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 18{,}84\ cm \cdot 9{,}42\ cm = 177{,}47\ cm^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (3\ cm)^2 = 3{,}14 \cdot 9\ cm^2 = 28{,}26\ cm^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b =$

$= 177{,}47\ cm^2 + 2 \cdot 28{,}26\ cm^2 = 233{,}99\ cm^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 28{,}26\ cm^2 \cdot 9{,}42\ cm = 266{,}2\ cm^3$

55. Resolvemos cada cilindro:

Cilindro A

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (6cm)^2 = 3{,}14 \cdot 36cm^2 = 113{,}04\ cm^2$

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6cm \cdot 12cm = 452{,}16\ cm^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 113{,}04\ cm^2 \cdot 12\ cm = 1356{,}48\ cm^3$

Cilindro B

Utilizamos la fórmula del área de la base y despejamos el radio:

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow 19{,}3 = 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = 19{,}3 : 3{,}14 = 6{,}15$

$\Rightarrow r = \sqrt{6{,}15} \simeq 2{,}48$ cm

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}48cm \cdot 8cm = 124{,}6\ cm^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 19{,}3\ cm^2 \cdot 8\ cm = 154{,}4\ cm^3$

Cilindro C

Utilizamos la fórmula del volumen y despejamos el radio:

$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow 916 = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot 13{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 916 : 41{,}45 \simeq 22{,}1 \Rightarrow r = \sqrt{22{,}1} \simeq 4{,}7$cm

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4{,}7cm)^2 = 3{,}14 \cdot 22{,}09cm^2 =$

$= 69{,}36\ cm^2$

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}7cm \cdot 13{,}2cm = 389{,}61\ cm^2$

Cilindro D

Utilizamos la fórmula del área lateral y despejamos la altura:

$A_l = 2\pi rh \Rightarrow 1012 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}2 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 1012 : 26{,}38 = 38{,}36$ cm

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4{,}2cm)^2 = 3{,}14 \cdot 17{,}64cm^2 =$

$= 55{,}39\ cm^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 55{,}39cm^2 \cdot 38{,}36\ cm = 2124{,}76\ cm^3$

Completamos la tabla:

Cilindro	A	B	C	D
Altura (cm)	12	8	13,2	38,36
Radio (cm)	6	2,48	4,7	4,2
Área de una base (cm^2)	113,04	19,3	69,36	55,39
Área lateral (cm^2)	452,16	124,6	39,61	1012
Volumen (cm^3)	1356,48	154,4	916	2124,76

56. Ejercicio resuelto en el libro.

57. En un cilindro de radio r y altura h, el volumen es $V = \pi r^2 h$ y el área lateral es $A_l = 2\pi rh$.

Si duplicamos la altura es 2h y si reducimos el radio a la mitad es $\frac{r}{2}$

El volumen del nuevo cilindro es:

$$V' = \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 2h = \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot 2h = \frac{\pi r^2 h}{2} = \frac{V}{2}$$

El área lateral del nuevo cilindro es:

$$A_l' = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot 2h = 2\pi rh$$

Por tanto, el volumen se reduce a la mitad y el área lateral no varía.

58. Se necesita conocer dos de los siguientes tres elementos: radio, altura y generatriz.

59. Medimos el radio r de las bases y comprobamos si el arco de circunferencia miden $2\pi r$.

El único desarrollo que lo cumple es B: r = 0,5 cm y $2\pi r = 3{,}14$ cm

60. Conocidas la generatriz y el radio de la base, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 10^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow 100 = h^2 + 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8$ cm

La altura del cono mide 8 cm

61. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 15^2 = h^2 + 9^2 \Rightarrow 225 = h^2 + 81 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = \sqrt{144} = 12$ cm

La altura del cono mide 12 cm.

62. El radio del cuadrante es la generatriz del cono y el área lateral la cuarta parte del círculo de ese mismo radio, por tanto:

$A_l = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 24^2 = \frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 576 =$

$= 425{,}16 \text{ cm}^2$

Utilizamos la fórmula del área lateral del cono y despejamos el radio:

$A_l = \pi r g \Rightarrow 425{,}16 = 3{,}14 \cdot r \cdot 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 425{,}16 : 75{,}36 \simeq 5{,}64$ cm

El radio de la base del cono mide 5,64 cm.

63. El radio del semicírculo es la generatriz del cono y el área lateral la mitad del área de un círculo de ese mismo radio, por tanto:

$A_l = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 16 =$

$= 25{,}12 \text{ cm}^2$

Utilizamos la fórmula del área lateral del cono para hallar el radio de la base:

$A_l = \pi r g \Rightarrow 25{,}12 = 3{,}14 \cdot r \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 25{,}12 : 12{,}56 \simeq 2$ cm

El radio de la base del cono mide 2 cm.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 4^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow 16 = h^2 + 4 \Rightarrow h^2 = 12$

$\Rightarrow h = \sqrt{12} = 3{,}46$ cm

La altura del cono mide 3,46 cm.

64. Actividad personal.

El volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

65. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{169} = 13$ cm

El área lateral es:

$A_l = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot 5\text{cm} \cdot 13\text{cm} = 204{,}1 \text{ cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (5\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 25\text{cm}^2 = 78{,}5 \text{ cm}^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + A_b = 204{,}1 \text{ cm}^2 + 78{,}5 \text{ cm}^2 = 282{,}6 \text{ cm}^2$

El volumen es:

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 78{,}5 \text{ cm}^2 \cdot 12 \text{ cm} = 314 \text{ cm}^3$

66. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura del cono:

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow 25 = 9 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$ cm

El volumen es:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (3 \text{ cm})^2 \cdot 4 \text{ cm} =$

$= 37{,}68 \text{ cm}^3$

67. Resolvemos:

a) La generatriz del cono coincide con el radio del semicírculo, de manera que la longitud de la semicircunferencia (y de la base) es:

$\frac{1}{2} \cdot 2\pi g = 3{,}14 \cdot 20 = 62{,}8$ cm

Calculamos el radio r de la base:

$2\pi r = 62{,}8 \text{ cm} \Rightarrow r = 62{,}8 : 6{,}28 = 10$ cm

Aplicamos el teorema de Pitágoras y calculamos la altura del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 20^2 = h^2 + 10^2 \Rightarrow 400 = h^2 + 100$

$\Rightarrow h^2 = 300 \Rightarrow h = \sqrt{300} \simeq 17{,}32$ cm

Por tanto, el radio de la base mide 10 cm, la generatriz 20 cm y la altura 17,32 cm

b) El área lateral es:

$A_l = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot 10\text{cm} \cdot 20\text{cm} = 628 \text{ cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (10\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 100\text{cm}^2 =$

$= 314 \text{ cm}^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + A_b = 628 \text{ cm}^2 + 314 \text{ cm}^2 = 942 \text{ cm}^2$

c) El volumen es:

$V = \frac{1}{3} A_b h = \frac{1}{3} \cdot 314 \text{ cm}^2 \cdot 17{,}32 \text{ cm} = 1812{,}83 \text{ cm}^3$

Página 228

68. Utilizamos la fórmula del área lateral y despejamos la generatriz:

$A_l = \pi r g \Rightarrow 226{,}08 = 3{,}14 \cdot 6 \cdot g \Rightarrow$

$\Rightarrow g = 226{,}08 : 18{,}04 \simeq 12{,}53$ cm

La generatriz mide 12,53 cm.

69. Resolvemos cada caso:

Cono A

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 = 6^2 + (4{,}5)^2 = 36 + 20{,}25 = 56{,}25 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ cm

El área lateral es:

$A_l = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot 4{,}5\text{cm} \cdot 7{,}5\text{cm} = 105{,}98 \text{ cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4{,}5\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 20{,}25\text{cm}^2 =$
$= 63{,}59 \text{ cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 63{,}59 \text{ cm}^2 \cdot 6 \text{ cm} = 127{,}18 \text{ cm}^3$$

Cono B

Utilizamos la fórmula del área de la base y despejamos el radio:

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow 21{,}4 = 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = 21{,}4 : 3{,}14 = 6{,}82$
$\Rightarrow r = \sqrt{6{,}82} \simeq 2{,}61 \text{ cm}$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 = (2{,}61)^2 + (9{,}2)^2 = 6{,}81 + 84{,}64 = 91{,}45$
$\Rightarrow g = \sqrt{91{,}45} = 9{,}56 \text{ cm}$

El área lateral es:

$A_l = \pi rg \simeq 3{,}14 \cdot 2{,}61\text{cm} \cdot 9{,}56\text{cm} = 78{,}35 \text{ cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 21{,}4 \text{ cm}^2 \cdot 9{,}2\text{cm} = 65{,}63 \text{ cm}^3$$

Cono C

Utilizamos la fórmula del volumen y despejamos el radio:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 1816 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \cdot 15{,}4 \Rightarrow$$

$r^2 = 1816 : 16{,}12 \simeq 112{,}66 \Rightarrow r = \sqrt{112{,}66} \simeq 10{,}61\text{cm}$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 = (15{,}4)^2 + (10{,}61)^2 = 237{,}17 + 112{,}66 =$
$= 349{,}82 \Rightarrow g = \sqrt{349{,}82} = 18{,}70 \text{ cm}$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot 112{,}66 = 353{,}75 \text{ cm}^2$

El área lateral es:

$A_l = \pi rg \simeq 3{,}14 \cdot 10{,}61\text{cm} \cdot 18{,}70\text{cm} = 623 \text{ cm}^2$

Cono D

Utilizamos la fórmula del área lateral del cono y despejamos el radio:

$A_l = \pi rg \Rightarrow 954 = 3{,}14 \cdot r \cdot 23{,}9 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 954 : 75{,}05 \simeq 12{,}71 \text{ cm}$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (23{,}9)^2 = h^2 + (12{,}71)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h^2 = 571{,}21 - 161{,}54 = 409{,}67 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = \sqrt{409{,}67} \simeq 20{,}24 \text{ cm}$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (12{,}71)^2 = 507{,}25 \text{ cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 507{,}25 \text{ cm}^2 \cdot 20{,}24\text{cm} = 3422{,}25 \text{ cm}^3$$

Cono	A	B	C	D
Altura (cm)	6	9,2	15,4	20,2
Radio (cm)	4,5	2,6	10,6	12,7
Generatriz (cm)	7,5	9,6	18,7	23,9
Área de una base (cm^2)	63,6	21,4	353,8	507,3
Área lateral (cm^2)	106	78,4	623	954
Volumen (cm^3)	127,2	65,6	1816	3422,3

70. En un cono de radio r y altura h, el volumen viene dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Si reducimos el radio a la mitad es $\frac{r}{2}$, y si duplicamos la altura es 2h.

El volumen del nuevo cono es:

$$V' = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 2h = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{4} \cdot 2h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{2} V$$

Por tanto, el volumen se reduce a la mitad.

71. El volumen del cilindro es:

$V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot (6\text{cm})^2 \cdot 8 \text{ cm} = 904{,}32 \text{ cm}^3$

Utilizamos la fórmula del volumen del cono y despejamos su altura:

$$V' = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h' \Rightarrow 904{,}32 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot h' \Rightarrow$$

$\Rightarrow h' = 904{,}32 : 37{,}68 = 24 \text{ cm}$

La altura del cono mide 24 cm.

72. El radio de la esfera es el radio de la circunferencia máxima, por tanto:

$l = 2\pi r \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 \text{ cm} = 94{,}2 \text{ cm}$

La longitud es de 94,2 cm.

73. El radio de la circunferencia máxima es el radio de la esfera, por tanto:

$l = 2\pi r \Rightarrow 113{,}04 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 113{,}04 : 6{,}28 = 18 \text{ cm}$

El radio mide 18 cm.

74. El radio de la esfera mide 11 cm, por tanto:

El área es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4 \cdot 3{,}14 \cdot (11\text{cm})^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 121\text{cm}^2 =$
$= 1519{,}76 \text{ cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (11\text{cm})^3}{3} = 5572{,}45 \text{ cm}^3$$

75. El área es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4·3,14·(18cm)^2 =$

$= 4·3,14·324cm^2 = 4069,44\ cm^2$

El volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4·3,14·(18cm)^3}{3} = 24\,416,64\ cm^3$$

76. El área de la esfera es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4·3,14·(6cm)^2 =$

$= 4·3,14·36cm^2 = 452,16\ cm^2$

Utilizamos la fórmula del área del cilindro y despejamos su altura:

$A_t = A_l + 2A_b = 2\pi rh + 2·\pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 452,16 = 2·3,14·6·h + 2·3,14·6^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 452,16 = 37,68·h + 226,08 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 226,08 : 37,68 = 6\ cm$

La altura del cilindro mide 6 cm.

77. Igualamos las expresiones del área y del volumen de la esfera, y despejamos el radio:

$$4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 4\pi = \frac{4}{3}\pi r \Rightarrow r = \left(4 - \frac{4}{3}\right)\pi = \frac{8}{3}\pi$$

El radio de la esfera mide $\frac{8}{3}\pi$ cm.

78. El área de la semiesfera es:

$$A = \frac{1}{2}·4\pi r^2 = 2·3,14·1,5^2 = 14,13\ m^2$$

El volumen de la semiesfera es:

$$V = \frac{1}{2}·\frac{4}{3}\pi r^3 \simeq \frac{4·3,14·1,5^3}{6} = 7,07\ m^3$$

79. Calculamos el número de husos esféricos:

360º : 18º = 20 husos

Calculamos el área de cada huso esférico dividiendo el área de la esfera entre 20:

$$A = \frac{1}{20}·4\pi r^2 = \frac{1}{5}·\pi r^2$$

80. Calculamos la amplitud de cada cuña esférica:

360º : 12 = 30º

Calculamos el volumen de cada cuña dividiendo el volumen de la esfera entre 12:

$$V = \frac{1}{12}·\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{9}\pi r^3$$

81. Calculamos el radio r de la esfera teniendo en cuenta que, la distancia del centro de la esfera al círculo, el radio de este círculo y el radio de la esfera determinan un triángulo rectángulo. Por tanto, por el teorema de Pitágoras:

$r^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow r = \sqrt{45} \simeq 6,7\ cm$

El radio de la esfera mide 6,7 cm.

82. El volumen es:

$V = \pi r^2·h \simeq 3,14 · (3cm)^2 · 20cm = 3,14 · 9cm^2 · 20m =$

$= 565,2\ cm^3$

83. Calculamos el volumen de un cilindro de radio 9 cm y altura 16 cm:

$V = \pi r^2·h \simeq 3,14 · (9cm)^2 · 16cm =$

$= 3,14 · 81cm^2 · 16cm = 4069,44\ cm^3 = 4,069\,44\ dm^3$

Caben unos 4 litros de agua.

84. Calculamos el volumen de un cilindro de radio 7 cm y altura 25 cm:

$V = \pi r^2·h \simeq 3,14 · (7cm)^2 · 25cm =$

$= 3,14 · 49cm^2 · 24cm = 3846,5\ cm^3 = 3,8465\ dm^3$

Caben 3,85 litros de agua aproximadamente.

85. Calculamos el volumen de un cono de radio de la base 19 km y altura 3,776 km:

$$V = \frac{1}{3}·\pi r^2·h = \frac{1}{3}· 3,14 · (19\ km)^2 · 3,776\ km =$$

$= 1426,75\ km^3 = 1427\ km^3$

El volumen aproximado es de 1427 km^3.

86. El área de la Tierra es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4 · 3,14 · (6400\ km)^2 =$

$= 4 · 3,14 · 40\,960\,000\ km^2 = 514\,457\,600\ km^2$

El volumen de la Tierra es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4·3,14·(6400km)^3}{3} =$$

$= 1\,097\,509\,547\,000\ km^3$

87. El volumen de la luna es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4·3,14·(1730km)^3}{3} =$$

$= 21\,677\,375\,170\ km^3$

Dividimos los volúmenes de la tierra y la luna y observamos que la luna es 50,6 veces más pequeña.

88. Calculamos el área de la esfera de radio 11 cm:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4 · 3,14 · (11\ cm)^2 = 1519,76\ cm^2$

Se necesitan 1519,76 cm^2 de cuero.

89. Resolvemos:

a) Calculamos el área lateral del cilindro de altura 11 cm y radio 2,8 cm:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 · 3,14 · 2,8\ cm · 11\ cm = 193,42\ cm^2$

La etiqueta de papel mide 193,42 cm^2.

b) Calculamos el área del círculo de radio 2,8 cm:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3,14 · (2,8\ cm)^2 = 3,14 · 7,84\ cm^2 =$

$= 24,62\ cm^2$

90. Calculamos el radio de la base:

$l = 2\pi r \Rightarrow 28,26 = 2·3,14·r \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 28,26 : 6,28 = 4,5\ m$

Calculamos el volumen del cilindro:

$V = A_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (4{,}5\ m)^2 \cdot 6\ m = 381{,}51\ m^3 =$

$= 381\ 510\ dm^3 = 381\ 510\ l = 3815{,}1\ hl$

91. Calculamos:

a) Calculamos el área lateral del cilindro:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 16cm \cdot 12cm = 1205{,}76\ cm^2$

Se necesita $1205{,}76\ cm^2$ de papel.

b) Calculamos el área de la base del cilindro:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (16\ cm)^2 = 3{,}14 \cdot 256cm^2 =$

$= 803{,}84\ cm^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b = 1205{,}76cm^2 + 2 \cdot 803{,}84cm^2 =$

$= 2813{,}44\ cm^2$

La superficie de hojalata mide $2813{,}44\ cm^2$.

c) Calculamos el volumen del cilindro:

$V = A_b \cdot h = 803{,}84\ cm^2 \cdot 12\ cm = 9646{,}08\ cm^3$

El volumen del bote es de unos 9,65 litros.

Página 229

92. Calculamos:

a) Utilizamos la fórmula del área lateral y despejamos el radio:

$A_l = 2\pi rh \Rightarrow 633{,}80 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \cdot 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 633{,}80 : 106{,}76 \simeq 5{,}94\ m$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (5{,}94m)^2 = 110{,}8\ m^2$

b) El área total es:

$A_t = A_l + A_b = 633{,}80\ m^2 + 110{,}8\ m^2 = 744{,}6\ m^2$

c) El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 110{,}8\ m^2 \cdot 17\ m = 1883{,}6\ m^3$

93. Calculamos el volumen de un cono de radio 2,5 cm y altura 12 cm:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}5\ cm)^2 \cdot 12\ cm =$$

$= 78{,}5\ cm^3$

Caben $78{,}5\ cm^3$ de helado.

94. Resolvemos:

a) Tenemos que restar al volumen de la semiesfera el volumen del cilindro

El volumen de la semiesfera es:

$$V_{semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \simeq \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^3}{6} = 133{,}97\ m^3$$

Calculamos el volumen de un cilindro de radio 1 m y altura 2 m:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 2 = 6{,}28\ m^3$

Obtenemos el volumen de la pieza:

$V = V_{semiesfera} - V_{cilindro} = 133{,}97\ m^3 - 6{,}28\ m^3 =$

$= 127{,}69\ m^3$

b) Tenemos que sumar la superficie de la esfera, la del círculo de la base de la semiesfera y la superficie lateral del cilindro:

El área de la semiesfera es:

$$A_{semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 100{,}48\ m^2$$

El área del círculo de la base es:

$A_{círculo} = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot 4^2 = 50{,}24\ m^2$

El área lateral del cilindro es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 2 = 12{,}56\ m^2$

La superficie a pintar es:

$A = A_{semiesfera} + A_{círculo} + A_l =$

$= 100{,}48\ m^2 + 50{,}24\ m^2 + 12{,}56\ m^2 = 163{,}28\ m^2$

Por tanto, el coste de pintarla será:

$2{,}75\ €/m^2 \cdot 163{,}28\ m^2 = 449{,}02\ €$

95. Tenemos que restar al volumen de un cilindro el volumen de una esfera:

El volumen del cilindro (vaso) es:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (44{,}5mm)^2 \cdot 96\ mm =$

$= 3{,}14 \cdot 1908{,}25\ mm^2 \cdot 96\ mm = 596\ 926{,}56\ mm^3$

El volumen de la esfera (cubito) es:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (27{,}5\ mm)^3}{3} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 20\,796{,}88\,mm^3}{3} = 87\ 069{,}6\ mm^3$$

El volumen a calcular es:

$V = V_{cilindro} – V_{esfera} =$

$= 596\ 926{,}56\ mm^3 – 87\ 069{,}6\ mm^3 =$

$= 509\ 856{,}96\ mm^3 = 0{,}50985696\ dm^3$

Por tanto, se necesita medio litro de líquido aproximadamente.

96. El volumen de el cilindro mayor es:

$V_1 = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (14cm)^2 \cdot 15cm = 9231{,}6\ cm^3$

El volumen de el cilindro menor es:

$V_2 = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (10cm)^2 \cdot 5cm = 1570\ cm^3$

El volumen del medio cono es:

$$V_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot (10\ cm)^2 \cdot 13cm =$$

$= 680{,}33\ cm^3$

El volumen de la pieza es $V = V_1 + V_2 + V_3 =$

$= 9231{,}6\ cm^3 + 1570\ cm^3 + 680{,}33\ cm^3 =$

$= 11\ 481{,}93\ cm^3$

97. Para cada cilindro tenemos que restar al volumen del cilindro exterior el volumen del cilindro interior:

Calculamos el primer volumen, con radios de 11 mm y 11 – 2,7 = 8,3 mm, y altura 3,3 mm:

$V_{1ext} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (11mm)^2 \cdot 3{,}3mm = 1253{,}8\ mm^3$

$V_{1int} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (8{,}3mm)^2 \cdot 3{,}3mm = 713{,}84\ mm^3$

$V_1 = V_{1ext} - V_{1int} = 1253{,}8 \text{ mm}^3 - 713{,}84 \text{ mm}^3 =$
$= 539{,}96 \text{ mm}^3$

Calculamos el segundo volumen, con radios de 8,3 mm y 8,3 – 2,7 = 5,6 mm, y altura 3,3 + 4,6 = 7,9 mm:

$V_{2ext} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (8{,}3\text{mm})^2 \cdot 7{,}9\text{mm} = 1708{,}89 \text{ mm}^3$

$V_{2int} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (5{,}6\text{mm})^2 \cdot 7{,}9\text{mm} = 777{,}92 \text{ mm}^3$

$V_2 = V_{2ext} - V_{2int} = 1708{,}89 \text{ mm}^3 - 777{,}92 \text{ mm}^3 =$
$= 930{,}97 \text{ mm}^3$

Calculamos el tercer volumen, con radios de 5,6 mm y 5,6 – 2,7 = 2,9 mm, y altura 7,9 + 4,6 = 12,5 mm:

$V_{3ext} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (5{,}6\text{mm})^2 \cdot 12{,}5\text{mm} = 1230{,}88 \text{ mm}^3$

$V_{3int} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (2{,}9\text{mm})^2 \cdot 12{,}5\text{mm} = 330{,}09 \text{ mm}^3$

$V_3 = V_{3ext} - V_{3int} = 1230{,}88 \text{ mm}^3 - 330{,}09\text{mm}^3 =$
$= 900{,}79 \text{ mm}^3$

Calculamos el cuarto volumen, con radios de 2,9 mm y 2,9 – 2,7 = 0,2 mm, y altura 12,5 + 4,6 = 17,1 mm:

$V_{4ext} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (2{,}9\text{mm})^2 \cdot 17{,}1\text{mm} = 451{,}57 \text{ mm}^3$

$V_{4int} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (0{,}2\text{mm})^2 \cdot 17{,}1\text{mm} = 2{,}15 \text{ mm}^3$

$V_4 = V_{4ext} - V_{4int} = 1230{,}88 \text{ mm}^3 - 2{,}15 \text{ mm}^3 =$
$= 449{,}42 \text{ mm}^3$

El volumen de polietileno es:

$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 =$
$= 539{,}96 \text{ mm}^3 + 930{,}97 \text{ mm}^3 + 900{,}79 \text{ mm}^3 +$
$+ 449{,}42 \text{ mm}^3 = 2821{,}14 \text{ mm}^3$

98. Las soluciones son:

a) El volumen es:
$V = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (0{,}6 \text{ m})^2 \cdot 8\text{m} = 9{,}04 \text{ m}^3$

b) La masa de la columna es:
$2600 \text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}04 \text{ m}^3 = 23\,504 \text{ kg}$

99. Calculamos:

a) El área lateral es la suma del área lateral del cono y la del cilindro:

La generatriz del cono la calculamos utilizando el teorema de Pítagoras:

$g^2 = h^2 + r^2 = 7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{85} \simeq 9{,}22 \text{ cm}$

El área lateral del cono es:

$A_l = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 9{,}22 \text{ cm} = 173{,}7 \text{ cm}^2$

El área lateral del cilindro es:

$A_l = 2\pi r h \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6\text{cm} \cdot 18\text{cm} = 678{,}24 \text{ cm}^2$

Por tanto, el área lateral de la pieza es de:

$173{,}7 \text{ cm}^2 + 678{,}24 \text{ cm}^2 = 851{,}94 \text{ cm}^2$

El área total se obtiene añadiendo el área de la base del cilindro:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (6\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 36\text{cm}^2 =$
$= 113{,}04 \text{ cm}^2$

Luego, el área total es de:

$851{,}94 \text{ cm}^2 + 113{,}04 \text{ cm}^2 = 964{,}98 \text{ cm}^2$

b) El volumen es la suma del volumen del cono y el del cilindro:

El volumen del cono es:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (6 \text{ cm})^2 \cdot 7\text{cm} =$
$= 263{,}76 \text{ cm}^3$

El volumen del cilindro es:

$V = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (6\text{cm})^2 \cdot 18\text{cm} =$
$= 3{,}14 \cdot 36\text{cm}^2 \cdot 18\text{cm} = 2034{,}72 \text{ cm}^3$

Por tanto, el volumen de la pieza es de:

$263{,}76 \text{ cm}^3 + 2034{,}72 \text{ cm}^3 = 2298{,}48 \text{ cm}^3$

c) El volumen de la pieza es de 2,29848 dm^3, por tanto su masa es de:

$7{,}87 \text{ kg/dm}^3 \cdot 2{,}29848 \text{ dm}^3 = 18{,}09 \text{ kg}$

100. Calculamos el área lateral del cilindro y el área de la base:

El área lateral es:

$A_l = 2\pi r h \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3\text{m} \cdot 6\text{m} = 113{,}04 \text{ m}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (3\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 9\text{cm}^2 = 28{,}26 \text{ m}^2$

Por tanto, la superficie a pintar es:

$A_t = 2 \cdot A_l + A_b = 2 \cdot 113{,}04 \text{ m}^2 + 28{,}26 \text{ m}^2 =$
$= 226{,}08 \text{ m}^2 + 28{,}26 \text{ m}^2 = 254{,}34 \text{ m}^2$

Obtenemos los botes de pintura:

$254{,}34 \text{ m}^2 : 43 \text{ m}^2\text{/bote} = 5{,}91$ botes

Calculamos el precio:

6 botes · 120 euros/bote = 720 euros

Por tanto, se necesitan 6 botes de pintura y costarán 720 euros.

101. Calculamos el volumen del cilindro:

$V = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (0{,}5 \text{ m})^2 \cdot 1{,}5 \text{ m} = 1{,}1775 \text{ m}^3 =$
$= 1177{,}5$ litros

Calculamos el tiempo:

1177,5 litros : 40 litros/minuto = 29,44 minutos

Por tanto, tardará aproximadamente 29 minutos y 26 segundos.

102. Calculamos primero la capacidad de cada recipiente por separado:

El volumen del vaso es:

$\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 9^2 \cdot 2x = 162\pi \cdot x \ \text{cm}^3$

El volumen de la copa es:

$\pi r^2 \cdot h + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot x = \pi \cdot 9^2 \cdot 6 + \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot x =$

$= (486\pi + 27\pi \cdot x)\text{cm}^3$

Igualamos ambas expresiones:

$162\pi \cdot x = 486\pi + 27\pi \cdot x$;

$162 \cdot x = 486 + 27 \cdot x$;

$135 \cdot x = 486$;

$x = 3,6$

Por lo tanto, el valor de x ha de ser 3,6 cm para que ambos recipientes tengan la misma capacidad.

Esta capacidad es la siguiente:

$162\pi \cdot 3,6 = 162 \cdot 3,14 \cdot 3,6 = 1831,25\ cm^3$

103. Calculamos el radio r del círculo que forma la superficie del agua, utilizando la fórmula del volumen del cono de 18 cm = 1,8 dm de altura:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow 1 = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot r^2 \cdot 1,8 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 1 : 1,884 \simeq 0,53 \Rightarrow r = \sqrt{0,53} \simeq 0,73$ dm

Calculamos el radio R del cono, utilizando la semejanza de triángulos:

$\frac{1,8}{0,73} = \frac{2,5}{R} \Rightarrow 1,8R = 1,825 \Rightarrow R = 1,01$ dm

Calculamos el volumen del cono (jarrón):

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot (1,01dm)^2 \cdot 2,5\ dm =$

$= 2,67\ dm^3$

El jarrón tiene una capacidad aproximada de 2,67 litros.

104. Calculamos el volumen del cilindro:

$V = \pi r^2 \cdot h \simeq 3,14 \cdot (7cm)^2 \cdot 12cm = 1846,32\ cm^3$

Calculamos la masa del aceite, cuando el recipiente está lleno:

$1846,32\ cm^3 \cdot 0,918\ g/cm^3 = 1694,92\ g \simeq 1,69$ kg

Calculamos la masa del recipiente vacío:

3 – 1,69 = 1,31 kg

Por tanto, la masa cuando está vacío es de 1,31 kg.

Página 230

105. Igualamos las expresiones del volumen del cilindro de altura h_{ci} y de la esfera:

$\pi r^2 \cdot h_{ci} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow h_{ci} = \frac{4}{3} r$

La altura del cilindro es cuatro tercios del radio.

Igualamos las expresiones del volumen del cono de altura h_{co} y de la esfera:

$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_{co} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow h_{co} = 4r$

La altura del cono es el cuádruple del radio.

106. Ejercicio resuelto en el libro.

107. Prolongamos la altura y la generatriz del tronco, y obtenemos dos triángulos en posición de Tales, de manera que:

$\frac{x}{6} = \frac{x+8}{18} \Rightarrow 18x = 6x + 48 \Rightarrow 12x = 48 \Rightarrow x = 4$

Calculamos la generatriz g del cono mayor:

$g^2 = 12^2 + 18^2 = 144 + 324 = 468 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{468} \simeq 21,63$ cm

Calculamos la generatriz g’ del cono menor:

$g'^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow g' = \sqrt{52} \simeq 7,21$ cm

El área lateral del tronco es la diferencia entre las áreas laterales de los dos conos:

$A_l = \pi Rg - \pi rg' =$

$= 3,14 \cdot 18\ cm \cdot 21,63\ cm - 3,14 \cdot 6\ cm \cdot 7,21\ cm =$

$= 1222,53\ cm^2 - 135,84\ cm^2 = 1086,69\ cm^2$

El área de las bases es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3,14 \cdot (6cm)^2 = 3,14 \cdot 36cm^2 = 113,04\ cm^2$

$A_B = \pi R^2 \simeq 3,14 \cdot (18cm)^2 = 3,14 \cdot 324cm^2 =$

$= 1017,36\ cm^2$

El área del tronco de cono es:

$A = A_l + A_b + A_B = 1086,69\ cm^2 + 113,04\ cm^2 +$

$+ 1017,36\ cm^2 = 2217,09\ cm^2$

108. Llamamos x a la distancia entre la base superior del cilindro y el vértice del cono, de manera que obtenemos dos triángulos en posición de Tales. Luego:

$\frac{x}{4} = \frac{12}{6} \Rightarrow 6x = 48 \Rightarrow x = 8$ cm

Obtenemos la altura del cilindro: 12 cm – 8 cm =

= 4 cm

Calculamos el volumen del cilindro:

$V = \pi r^2 h \simeq 3,14 \cdot (4cm)^2 \cdot 4cm = 3,14 \cdot 16cm^2 \cdot 4m =$

$= 200,96\ cm^3$

109. El primer cuerpo está formado por un cono, un cilindro mayor y un cilindro menor:

Calculamos su área:

Calculamos la generatriz del cono:

$g^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow g = \sqrt{32} \simeq 5,66$ cm

El área lateral del cono es:

$A_{co} = \pi rg = 3,14 \cdot 4cm \cdot 5,66cm = 71,09\ cm^2$

El área lateral de los cilindros es:

$A_{ci1} = 2\pi Rh \simeq 2 \cdot 3,14 \cdot 4cm \cdot 2cm = 50,24\ cm^2$

$A_{ci2} = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3,14 \cdot 2cm \cdot 2cm = 25,12\ cm^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi R^2 \simeq 3,14 \cdot (4cm)^2 = 3,14 \cdot 16cm^2 = 50,24\ cm^2$

Por tanto, el área del cuerpo es: $A = 71,09\ cm^2 +$

$+ 50,24\ cm^2 + 25,12\ cm^2 + 50,24\ cm^2 = 196,69\ cm^3$

Calculamos su volumen:

El volumen del cono es:

$V_{co} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot (4cm)^2 \cdot 4\ cm = 66,99\ cm^3$

El volumen de los cilindros es:

$V_{ci1} = \pi R^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (4cm)^2 \cdot 2cm =$

$= 3{,}14 \cdot 16cm^2 \cdot 2cm = 100{,}48\ cm^3$

$V_{ci2} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (2cm)^2 \cdot 2cm =$

$= 3{,}14 \cdot 4cm^2 \cdot 2cm = 25{,}12\ cm^3$

Por tanto, el volumen del cuerpo es: $V = 66{,}99\ cm^3 +$ $+ 100{,}48\ cm^3 + 25{,}12\ cm^3 = 192{,}59\ cm^3$

El segundo cuerpo está formado por una semiesfera y un cilindro agujereado por un cono:

Calculamos su área:

Calculamos la generatriz del cono:

$g^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow g = \sqrt{32} \simeq 5{,}66\ cm$

El área de la semiesfera es:

$A_{semi} = 2\pi r^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot (4cm)^2 = 100{,}48\ cm^2$

El área lateral del cilindro es:

$A_{ci1} = 2\pi Rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8cm \cdot 4cm = 200{,}96\ cm^2$

El área lateral del cono es:

$A_{cono} = \pi rg \simeq 3{,}14 \cdot 4cm \cdot 5{,}66cm = 71{,}09\ cm^2$

El área de la corona circular es:

$A_{cc} = \pi R^2 - \pi r^2 = 3{,}14 \cdot (8^2 - 4^2) = 3{,}14 \cdot 48 =$

$= 150,\ 72\ cm^2$

Por tanto, el área del cuerpo es:

$A = A_{semi} + A_{ci1} + A_{cono} + 2\cdot A_{cc} =$

$= 100{,}48\ cm^2 + 200{,}96\ cm^2 + 71{,}09\ cm^2 +$

$+ 2\cdot 150,\ 72\ cm^2 = 673{,}97\ cm^3$

Calculamos su volumen:

El volumen de la semiesfera es:

$$V_{semi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \simeq \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^3}{6} = 133{,}97\ cm^3$$

El volumen del cilindro es:

$V_{ci} = \pi R^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (8cm)^2 \cdot 4cm = 803{,}84\ cm^3$

El volumen del cono es:

$$V_{co} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (4cm)^2 \cdot 4\ cm =$$

$= 66{,}99\ cm^3$

Por tanto, el volumen del cuerpo es:

$V = V_{semi} + V_{ci} - V_{co} =$

$= 133{,}97\ cm^3 + 803{,}84\ cm^3 - 66{,}99\ cm^3 = 870{,}82\ cm^3$

110. El volumen de la pieza es la diferencia entre el volumen de medio cono y el volumen de medio cilindro:

El volumen de medio cono es:

$$V_{co} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot (5\ cm)^2 \cdot 8\ cm = 104{,}67\ cm^3$$

El volumen de medio cilindro es:

$$V_{ci} = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot h \simeq \frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}5\ cm)^2 \cdot 4\ cm =$$

$= 14{,}13\ cm^3$

El volumen de la pieza es:

$V = V_{co} - V_{ci} = 104{,}67\ cm^3 - 14{,}13\ cm^3 = 90{,}54\ cm^3$

Calculamos la masa:

$7{,}85\ g/cm^3 \cdot 90{,}54\ cm^3 = 710{,}74\ g = 0{,}71074\ kg$

Calculamos el precio:

$0{,}185$ euros/kg $\cdot\ 0{,}71074$ kg $= 0{,}13$ euros

El material cuesta 13 céntimos.

111. Ejercicio resuelto en el libro.

112. El área es la diferencia entre el área de la esfera y el área curva del huso esférico, más el área de los dos semicírculos (un círculo):

El área de la esfera es:

$A_{es} = 4\pi r^2 \simeq 4 \cdot 3{,}14 \cdot (4cm)^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 16cm^2 =$

$= 200{,}96\ cm^2$

El área del huso es:

$$A_{hu} = \frac{200{,}96\ cm^2}{360º} \cdot 110º = 61{,}40\ cm^2$$

El área del círculo es:

$A_{ci} = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4cm)^2 = 3{,}14 \cdot 16cm^2 = 50{,}24\ cm^2$

El área es:

$A = A_{es} - A_{hu} + A_{ci} =$

$= 200{,}96\ cm^2 - 61{,}40\ cm^2 + 50{,}24\ cm^2 = 212{,}12\ cm^2$

El volumen es la diferencia entre el volumen de la esfera y el volumen del huso esférico:

El volumen de la esfera es:

$$V_{es} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (4\ cm)^3}{3} = 267{,}95\ cm^3$$

El volumen del huso es:

$$V_{hu} = \frac{267{,}95\ cm^3}{360º} \cdot 110º = 81{,}87\ cm^3$$

El volumen es $V = V_{es} - V_{hu} =$

$= 267{,}95\ cm^3 - 81{,}87\ cm^3 = 186{,}08\ cm^3$

113. Llamamos x a la distancia de la base a la que debemos situar el plano de corte.

El volumen del cono (sin cortar) es:

$$V_{co} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (12cm)^2 \cdot 18cm =$$

$= 2712{,}96\ cm^3$

El volumen del cono cortado es:

$2712{,}96 : 2 = 1356{,}48\ cm^3$, por tanto:

$$1356{,}48 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \cdot (18 - x)$$

Por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\frac{18-x}{r}=\frac{18}{12} \Rightarrow\ 12(18-x) = 18r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ r = \frac{12}{18}(18-x) \Rightarrow\ r = \frac{2}{3}(18-x)$$

Sustituimos en la expresión del volumen anterior y despejamos x:

$$1356{,}48 = \frac{1}{3}\cdot 3{,}14\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\ {}^2\cdot(18-x)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (18-x)^3 = 1356{,}48 : 0{,}47 = 28886{,}13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 18-x = \sqrt[3]{2886{,}13} \simeq 14{,}24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x = 18 - 14{,}24 = 3{,}76 \text{ cm}$$

La distancia de la base a la que debemos situar el plano de corte es de 3,76 cm.

114. El radio del círculo es el radio del hexágono y coincide con su lado (12 cm):

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema “a” del hexágono, que coincide con el radio de la base del cono:

$$12^2 = a^2 + 6^2 \Rightarrow a^2 = 144 - 36 = 108 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a = \sqrt{108} = 10{,}39 \text{ cm}$$

El volumen del cilindro es:

$$V_{ci} = \pi r^2\cdot h \simeq 3{,}14\cdot(12\text{cm})^2\cdot 2\text{cm} = 904{,}32 \text{ cm}^3$$

El volumen del prisma es:

$$V_{pri} = \frac{p\cdot a}{2}\cdot h = \frac{6\cdot 12\text{cm}\cdot 10{,}39\text{cm}}{2}\cdot 1 = 374{,}04 \text{ cm}^3$$

El volumen del cono es:

$$V_{co} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 3{,}14\cdot(10{,}39\text{cm})^2\cdot 8\text{cm} =$$

$$= 903{,}92 \text{ cm}^3$$

El volumen del cuerpo es:

$$V = V_{ci} + V_{pri} + V_{co} = 904{,}32 \text{ cm}^3 + 374{,}04 \text{ cm}^3 +$$

$$+ 903{,}92 \text{ cm}^3 = 2182{,}28 \text{ cm}^3$$

115. Actividad de investigación sobre las secciones cónicas:

Cónicas no degeneradas:

Circunferencia

Elipse

Hipérbola

Parábola

Cónicas degeneradas:

Punto

Recta

Rectas secantes

Desarrolla tus competencias

1. Porque no es posible coser (o pegar) ningún material para formar una esfera perfecta.

2. El icosaedro truncado tiene 90 aristas y 60 vértices.

3. La diagonal del cubo es el diámetro de la esfera circunscrita, que mide $d = 2\sqrt{3}$ cm

El volumen del cubo es:

$$V_{cu} = (2\text{cm})^3 = 8 \text{ cm}^3$$

El volumen de la esfera circunscrita es.

$$V_{es} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot\left(\sqrt{3}\text{ cm}\right)^3}{3} = 21{,}75 \text{ cm}^3$$

La esfericidad es $\frac{V_{cubo}}{V_{esfera}} = \frac{8 \text{ cm}^3}{21{,}75 \text{ cm}^3}\cdot 100 = 36{,}78$ %

4. El rombicosidodecaedro tiene 120 aristas y 60 vértices.

5. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Tiene 62 caras (casi el doble que el icosaedro truncado) de tres tipos diferentes de polígonos, por lo que resulta bas-tante más complejo y costoso de fabricar.

6. Sumamos 10% a la esfericidad del 86,74% y resulta 96,74%, es decir 97% aproximadamente. Por tanto, la opción correcta es B.

7. Si aumenta un 40% su peso, éste será el 140% de su peso:

140% de 369 g = 516,6 g

140% de 526 g = 596,4 g

Por tanto, al mojarse podría alcanzar un peso entre 516,6 g y 596,4 g.

8. Actividad de investigación personal. A modo de ejemplo:

a) Richard Buckminster Fuller (1895 - 1983) fue un diseñador, arquitecto, visionario e inventor estadounidense.

Entre muchas otras obras, libros e inventos, diseñó la cúpula geodésica.

Debido a su parecido con ella, este tipo de moléculas recibieron su nombre.

b) Por su estructura casi esférica y muy parecida a la de un balón de fútbol, alternando pentágonos y hexágonos.

Evaluación de estándares

1. Calculamos la longitud de la circunferencia de la base, y vemos si coincide con la medida de la base del rectángulo de la superficie lateral:

$l = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4$ cm $= 25{,}12$ cm

No puede ser el desarrollo del cilindro; y debe modificarse cambiando el dato de 20 cm por 25,12 cm.

2. Utilizamos la fórmula de la longitud de la circunferencia y despejamos el radio:

$l = 2\pi r \Rightarrow 18{,}84\text{cm} = 2\cdot 3{,}14\cdot r \Rightarrow r = 18{,}84 \text{ cm} : 6{,}28 = 3 \text{ cm}$

La otra opción es (con el rectángulo en el otro sentido):

$l = 2\pi r \Rightarrow 12{,}56 \text{ cm} = 2\cdot 3{,}14\cdot r \Rightarrow r = 12{,}56 \text{ cm} : 6{,}28 = 2 \text{ cm}$

Por tanto, el radio puede medir 2 cm o 3 cm.

3. El arco del sector circular coincide con la longitud de la circunferencia de la base, por tanto:

$l = 2\pi r = 2\cdot 3{,}14\cdot 5 \text{ cm} = 31{,}4 \text{ cm}$

4. Utilizamos la fórmula del área total del cilindro y despejamos su altura:

$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow$

$\Rightarrow 251{,}2 \text{ cm}^2 = 2\cdot 3{,}14\cdot(5\text{cm})^2 + 2\cdot 3{,}14\cdot 5\text{cm}\cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow 251{,}2 \text{ cm}^2 = 157 \text{ cm}^2 + 31{,}4\text{cm}\cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 94{,}2 \text{ cm}^2 : 31{,}4 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$

El volumen del cilindro es:

$V = \pi r^2\cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (5\text{cm})^2 \cdot 3\text{cm} = 3{,}14 \cdot 25\text{cm}^2\cdot 3\text{cm} =$

$= 225{,}5 \text{ cm}^3$

5. Llamamos x al lado menor del rectángulo, siendo 2x el lado mayor, y calculamos sus valores resolviendo la ecuación que se obtiene utilizando su perímetro:

$2x + 4x = 28 \Rightarrow 6x = 28 \Rightarrow x = 28 : 6 = 4{,}67$ cm

Calculamos el volumen del cilindro que engendra, de radio x = 4,67 cm y altura 2x = 9,34 cm:

$V = \pi r^2\cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (4{,}67\text{cm})^2 \cdot 9{,}34\text{cm} = 639{,}6 \text{ cm}^3$

6. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 = 8^2 + 12^2 = 64 + 144 = 208 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{208} \simeq 14{,}42 \text{ cm}$

El área lateral es:

$A_l = \pi rg \simeq 3{,}14 \cdot 8\text{cm} \cdot 14{,}42\text{cm} = 362{,}23 \text{ cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (8\text{cm})^2 = 200{,}96 \text{ cm}^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + A_b = 362{,}23 \text{ cm}^2 + 200{,}96 \text{ cm}^2 = 563{,}19 \text{ cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{1}{3}\cdot A_b\cdot h = \frac{1}{3} \cdot 200{,}96 \text{ cm}^2 \cdot 12 \text{ cm} = 803{,}84 \text{ cm}^3$$

7. Utilizamos la fórmula del área de la esfera y despejamos el radio:

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow 615{,}44 = 4\cdot 3{,}14\cdot r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 615{,}44:12{,}56 = 49 \Rightarrow r = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$

El volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(7\text{cm})^3}{3} = 1436{,}03 \text{ cm}^3$$

Si el radio de otra esfera es 2r, el volumen es V' $= \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 8\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = 8\cdot V$, el óctuplo del volumen de la otra esfera, es decir, su volumen es de 11488,24 cm^3.

8. Calculamos el área total del cilindro:

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4\text{cm} \cdot 6\text{cm} = 150{,}72 \text{ cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4\text{cm})^2 = 50{,}24\text{cm}^2$

El área total es:

$A_t = A_l + 2A_b = 150{,}72 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 50{,}24 \text{ cm}^2 =$

$= 251{,}2 \text{ cm}^2$

Utilizamos la fórmula del área de la esfera y despejamos el radio:

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow 251{,}2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 251{,}2 : 12{,}56 = 20 \Rightarrow r = \sqrt{20} \simeq 4{,}47 \text{ cm}$

El volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 89{,}44 \text{ cm}^3}{3} = 374{,}46 \text{ cm}^3$$

9. El volumen es la suma del volumen de una semiesfera y el volumen de un ortoedro.

El volumen de la semiesfera es:

$$V_{semi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \simeq \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(12\text{m})^3}{6} = 3617{,}28 \text{ m}^3$$

El volumen del prisma (ortoedro) es:

$V_{ortoedro} = (30\text{m})^2 \cdot 8 \text{ m} = 900 \text{ m}^2 \cdot 8 \text{ m} = 7200 \text{ m}^3$

El volumen del cuerpo es:

$V = V_{semi} + V_{orto} = 3617{,}28 \text{ m}^3 + 7200 \text{ m}^3 =$

$= 10\,817{,}28 \text{ cm}^3$

10. El volumen es la diferencia entre el volumen de un cilindro y el de un cono (su tercera parte).

El volumen del cilindro es:

$V_{ci} = \pi r^2\cdot h \simeq 3{,}14\cdot(6\text{m})^2\cdot 8\text{m} = 3{,}14\cdot 36\text{m}^2\cdot 8\text{m} =$

$= 904{,}32 \text{ m}^3$

El volumen del cono es:

$V_{co} = 904{,}32 \text{ m}^3 : 3 = 301{,}44 \text{ m}^3$

El volumen pedido es:

$V = V_{ci} - V_{co} = 904{,}32 \text{ m}^3 - 301{,}44 \text{ m}^3 = 602{,}88 \text{ m}^3$

Estrategia e ingenio

Para pensar un poco

En al caso de la cuerda superpuesta sobre el ecuador, su longitud sería:

$$L = 2\pi R_{Tierra}$$

$$L = 2\pi \cdot 6378000 = 12756000\pi = 40074155{,}8892 \text{ m}$$

Si la cuerda se separa 1 m de la superficie de la Tierra:

$$L = 2\pi(R_{Tierra} + 1) = 2\pi R_{Tierra} + 2\pi =$$

$$= 12756000\pi + 2\pi = 12756002\pi = 40074162{,}1724 \text{ m}$$

Por lo tanto la longitud que hay que añadir a la cuerda es de 6,2832 m o lo que es lo mismo, 2π m.

Recinto con curvas

La longitud de la curva mostrada es de 4 · 4 cm = 16 cm.

Para hallar el área del recinto coloreado primero calcularemos el área de un círculo completo e independiente:

$$r = \frac{4}{2\pi} = 0{,}6366 \text{ cm}$$

$$A_{círculo} = \pi \cdot 0{,}6366^2 = 1{,}2732 \text{ cm}^2$$

Si reorganizamos las zonas coloreadas podemos observar que el área total del recinto coloreado es igual a la suma del área de 12 cuadrados completos y 1 círculo.

$$A_{Total} = 12 \cdot 0{,}6366^2 + 1{,}2732 = 6{,}1363 \text{ cm}^2$$

¿Cómo hallar un volumen?

Actividad personal. A modo de ejemplo:

Empleando lo aprendido sobre el principio de Arquímedes, podríamos introducir la esfera en una probeta (recipiente graduado para medir volúmenes) y medir el volumen de agua desplazada, que será igual al volumen de la figura.

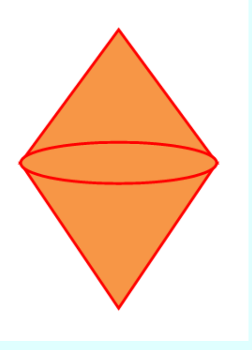
Posteriormente, despejando el radio en la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 10-7 de la guía)

11. El cuerpo geométrico que se engendra al girar un rombo alrededor de un eje que pasa por su diagonal mayor es como el siguiente:



12. Las soluciones son las siguientes:

a) El diámetro mide 8cm · 2 = 16 cm.

b) La altura mide 8 cm.

c) Aplicamos el teorema de Pitágoras y calculamos la hipotenusa, que es la generatriz:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 8^2 + 8^2 = 128 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{128} \simeq 11{,}31$ cm

La generatriz mide 11,31 cm.

(Viene de la página 10-9 de la guía)

Página 221

18. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{100} = 10$ cm

El área lateral es:

$A_l = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot 6\text{cm} \cdot 10\text{cm} = 188{,}4 \text{ cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (6 \text{ cm})^2 = 3{,}14 \cdot 36 \text{ cm}^2 = 113{,}04 \text{ cm}^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + A_b = 188{,}4 \text{ cm}^2 + 113{,}04 \text{ cm}^2 = 301{,}44 \text{ cm}^2$

El volumen es:

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 113{,}04\ cm^2 \cdot 8\ cm = 301{,}44\ cm^3$

19. El cono tiene generatriz g = 12 cm y radio r = 6 cm, de manera que aplicamos el teorema de Pitágoras y obtenemos la altura h:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 12^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow 144 = h^2 + 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 108 \Rightarrow h = \sqrt{108} \simeq 10{,}39\ cm$

El área lateral es:

$A_l = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot 6\ cm \cdot 12\ cm = 226{,}08\ cm^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (6\ cm)^2 = 3{,}14 \cdot 36\ cm^2 = 113{,}04\ cm^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + A_b = 226{,}08\ cm^2 + 113{,}04\ cm^2 = 339{,}12\ cm^2$

El volumen es:

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 113{,}04\ cm^2 \cdot 10{,}39\ cm = 391{,}5\ cm^3$

(Viene de la página 10-11 de la guía)

29. Calculamos el volumen de gas:

$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (12\ m)^3}{3} = 7234{,}56\ m^3$

Obtenemos el volumen de los dos depósitos más pequeños (iguales), que será la mitad:

$7234{,}56 : 2 = 3617{,}28\ m^3$

Sustituimos el dato del volumen en la fórmula y despejamos el radio:

$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow 3617{,}28 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 \Rightarrow$

$10851{,}84 = 12{,}56 \cdot r^3 \Rightarrow$

$r^3 = 10851{,}84 : 12{,}56 = 864 \Rightarrow$

$r = \sqrt[3]{864} \simeq 9{,}52\ m$

El radio de cada uno de los depósitos mide 9,52 m.

30. Sí, si el radio mide 3:

$A = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$

$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$

31. Llamamos A al área de la esfera de radio r y calculamos el área de la esfera de radio 2r:

$A' = 4\pi(2r)^2 = 4 \cdot \pi \cdot 4r^2 = 4A$

El área aumenta 4 veces (el cuádruple).

Llamamos V al volumen de la esfera de radio r y calculamos el volumen de la esfera de radio 2r:

$V' = \frac{4}{3} \pi(2r)^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 8r^3 = 8V$

El volumen aumenta 8 veces (el óctuple).

(Viene de la página 10-13 de la guía)

37. Debemos restar el volumen de los dos cilindros, el exterior y el interior:

El volumen del cilindro exterior es:

$V_{exterior} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (15\ cm)^2 \cdot 4cm =$

$= 3{,}14 \cdot 225\ cm^2 \cdot 4\ cm = 2826\ cm^3$

El volumen del cilindro interior es:

$V_{interior} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (6cm)^2 \cdot 4cm =$

$= 3{,}14 \cdot 36cm^2 \cdot 4cm = 452{,}16\ cm^3$

El volumen de la piedra es:

$V = V_{exterior} - V_{interior} = 2826\ cm^3 - 452{,}16\ cm^3 =$

$= 2373{,}84\ cm^3$

DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/749501	http://www.youtube.com/watch?v=_68Cf_8bbwQ
http://www.tiching.com/749502	http://www.geogebra.org/m/PARYTHhR
http://www.tiching.com/749504	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/redondos/index.htm
http://www.tiching.com/749505	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/cuerpos/desarrollo_cono/actividad.html
http://www.tiching.com/749506	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/cuerpos/tierra/actividad.html
http://www.tiching.com/749507	http://is-arquitectura.es/2011/09/21/casa-ecologica-de-naomi-campbell/