CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade Convocatoria ordinaria 2022	Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Despeje X de la ecuación matricial $AB(X-I)=C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema: $\begin{cases}x+(m-3)y+mz=1\\(m-3)y+(m^2-m)z=1\\x+m^2z=0\end{cases}$

3. Análisis

a) Calcule los límites $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$, donde *lnx* es el logaritmo neperiano de *x*.

b) Dibuje la gráfica de una función *f* continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: *f(0) = 0, f(3) = 0, f´´ > 0* en el intervalo (0, 1), *f´´ < 0* en el intervalo (2, 3) y *f* es constante en el intervalo (1, 2).

4. Análisis:

Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x)=2x-e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y=3x-1$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases}x=1+\lambda\\y=-1\quad \lambda\in\mathbb{R}\\z=0\end{cases}$.

b) Calcule los dos puntos de la recta $r:\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda,\quad \lambda\in\mathbb{R}\\z=\lambda\end{cases}$, cuya distancia al plano $\pi: x-1=0$ es igual a 2.

6. Geometría:

a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ y $s: \frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Si $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles.
¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

• La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.

• La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule el valor de $P(-2\le X\le 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu-\alpha\le X\le \mu+\alpha)=0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:
Despeje X de la ecuación matricial $AB(X-I)=C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$AB(X-I)=C\Rightarrow X-I=(AB)^{-1}C\Rightarrow X=(AB)^{-1}C+I$$

Calculamos la matriz AB.

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3&2+2&6\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&6\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

Comprobamos que su determinante es no nulo y por tanto existe su inversa.

$$|AB|=\begin{vmatrix}4&4&6\\0&1&0\\1&0&2\end{vmatrix}=8+0+0-6-0-0=2\neq 0$$

Calculamos su inversa.

$$AB=\begin{pmatrix}4&4&6\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow (AB)^T=\begin{pmatrix}4&0&1\\4&1&0\\6&0&2\end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1}=\frac{Adj\left((AB)^T\right)}{|AB|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}4&0&1\\4&1&0\\6&0&2\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}4&0\\6&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}4&1\\6&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}4&1\\6&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}4&0\\6&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}4&1\\4&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}4&0\\4&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-8&-6\\0&2&0\\-1&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\0&1&0\\-1/2&2&2\end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de X.

$$X=(AB)^{-1}C+I \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 2-3 & 4-4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1+2 & -2+2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema: $\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1 \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1 \\ x + m^2 z = 0 \end{cases}$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix} = \{\text{Saco } m-3 \text{ como factor común en columna } 2^{\text{a}}\} =$$

$$= (m-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & m(m-1) \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix} = \{\text{Saco } m \text{ como factor común en columna } 3^{\text{a}}\} =$$

$$= (m-3)m\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m-1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = (m-3)m(m+m-1-1) = (m-3)m(2m-2) = 2m(m-3)(m-1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m(m-3)(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

Analizamos cuatro casos por separado.

CASO 1. $m \neq 0, m \neq 3 \, y \, m \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ \quad -3y = 1 \\ x \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 \\ \boxed{y = \frac{-1}{3}} \\ \boxed{x = 0} \end{cases} \Rightarrow 0 - 3\left(\frac{-1}{3}\right) = 1 \Rightarrow 1 = 1 \text{ ¡}Cierto\text{!}$$

$$Soluciones: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{-1}{3}, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $m=3$

El sistema queda tan sencillo que intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} x+3z=1 \\ 6z=1 \\ x+9z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3z=1 \\ \boxed{z=\dfrac{1}{6}} \\ x+9z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3\dfrac{1}{6}=1 \\ x+9\dfrac{1}{6}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{2}=1 \\ x+\dfrac{3}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{¡¡Imposible!!}$$

El sistema es incompatible.

CASO 4. $m=1$

El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ -2y=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=1 \\ \boxed{y=\dfrac{-1}{2}} \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2\dfrac{-1}{2}+z=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1+z=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+z=0 \Rightarrow \boxed{x=-z}$$

$$\boxed{\text{Solución}: \begin{cases} x=-t \\ y=-\dfrac{1}{2}, \ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

3. Análisis

a) Calcule los límites $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$, donde *lnx* es el logaritmo neperiano de *x*.

b) Dibuje la gráfica de una función *f* continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: *f(0) = 0, f(3) = 0, f´´ > 0* en el intervalo (0, 1), *f´´ < 0* en el intervalo (2, 3) y *f* es constante en el intervalo (1, 2).

a) El primer límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}=\frac{0\cos 0}{\sin 0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+x(-\sin x)}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x}{\cos x}=\frac{\cos 0-0\sin 0}{\cos 0}=\frac{1-0}{1}=\boxed{1}$$

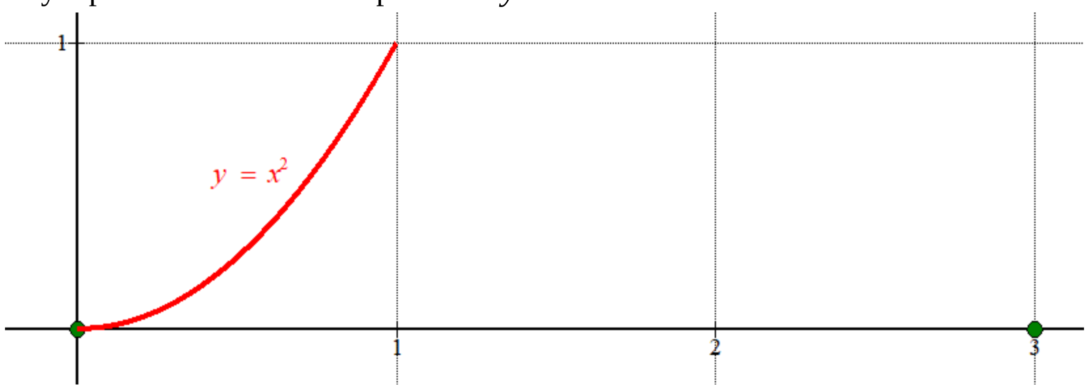
El segundo límite

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0\ln 0^+=0(-\infty)=Indeterminación=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{+\infty}=$$

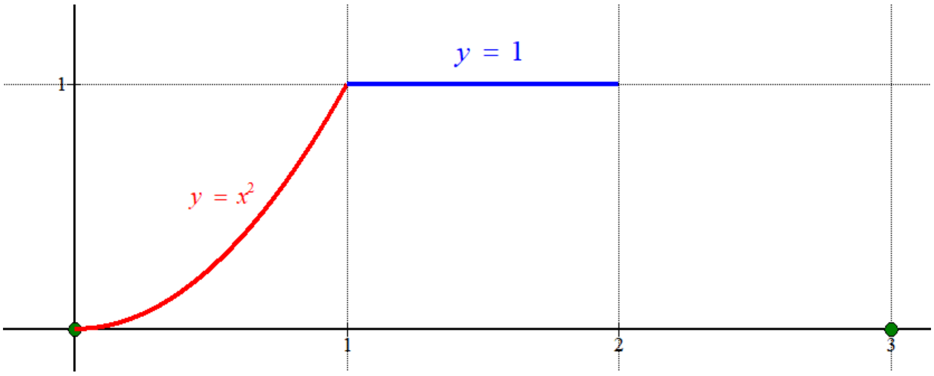
$$=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}-x=\boxed{0}$$

b) La función está definida en el intervalo $[0,3]$. Pasa por el punto (0, 0) y (3, 0) siendo siempre continua y no negativa. Es convexa (∪) entre 0 y 1, constante entre 1 y2, y cóncava (∩) entre 2 y 3.

Entre 0 y 1 podría ser un trozo de parábola $y = x^2$.

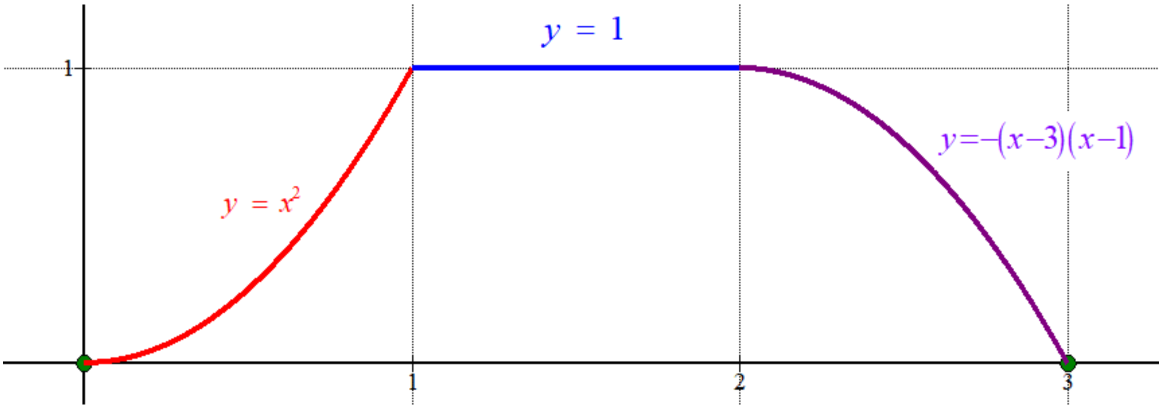


Cumple que empieza en (0, 0) y es convexa en el intervalo (0, 1).
Ahora debemos poner un trozo de función entre 1 y 2 constante. Debe ser $y=1$.



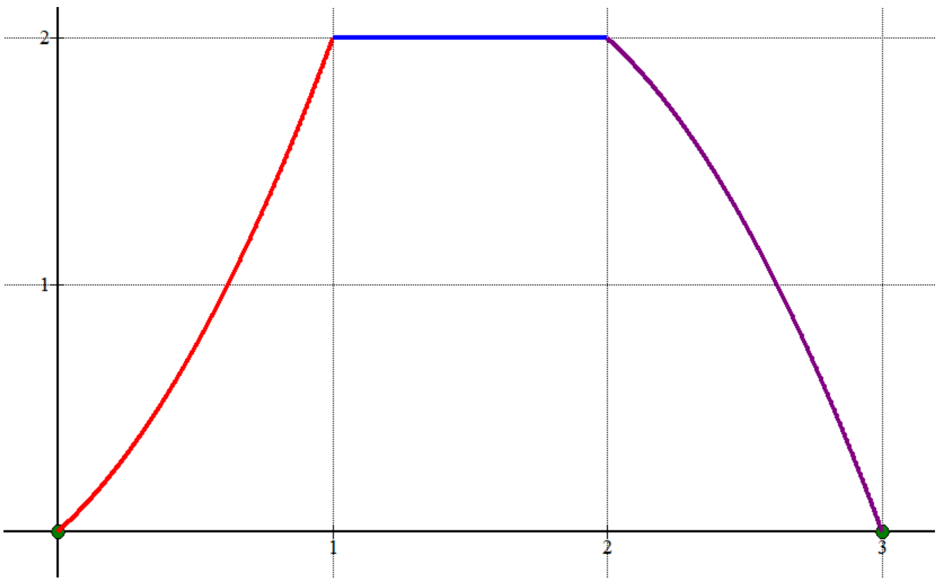
La función dibujada cumple que empieza en (0, 0), es convexa en el intervalo (0, 1), constante en el intervalo $(1,\ 2)$, continua y no negativa.

Nos falta el tramo entre 2 y 3 que debe de ser continua y cóncava. Ponemos un trozo de parábola que como debe pasar por los puntos (2, 1) y (3, 0) tomamos la expresión $y=-(x-3)(x-1)$. Con el signo – inicial es cóncava y con cada factor del producto consigo que pase por los puntos deseados.



Esta función cumple todo lo pedido. No nos piden tener la expresión de la función, por lo que basta con interpretar la información ofrecida y hacer el dibujo de arriba.

Se pueden dibujar muchas funciones que cumplen lo pedido.
Aquí pongo otra más.



4. Análisis:
Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x)=2x-e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y=3x-1$.

Si $f''(x)=2x-e^{-x}$ entonces su integral es la derivada primera.

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int 2x-e^{-x}dx=x^2+e^{-x}+A$$

Si volvemos a integrar la función derivada obtenemos la función *f(x)*, que dependerá de dos parámetros que determinamos con el resto de información proporcionada en el ejercicio.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int x^2+e^{-x}+Adx=\frac{x^3}{3}-e^{-x}+Ax+B$$

La función es $f(x)=\frac{x^3}{3}-e^{-x}+Ax+B$. Determinamos el valor de A y B.

Como la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y=3x-1$ se debe cumplir que tangente y función coincidan en x = 0.

$$\left.\begin{array}{l} x=0\rightarrow y=3\cdot 0-1=-1 \\ f(0)=\frac{0^3}{3}-e^{-0}+A\cdot 0+B \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=-1=\frac{0^3}{3}-e^{-0}+A\cdot 0+B\Rightarrow -1=-1+B\Rightarrow \boxed{B=0}$$

También se debe cumplir que la derivada de *f(x)* en x = 0 tenga el mismo valor que la pendiente de la recta (*m* = *3*).

$$\left.\begin{array}{l} y=3x-1\rightarrow m=f'(0)=3 \\ f'(x)=x^2+e^{-x}+A \end{array}\right\}\Rightarrow f'(0)=3=0^2+e^{-0}+A\Rightarrow 3=1+A\Rightarrow \boxed{A=2}$$

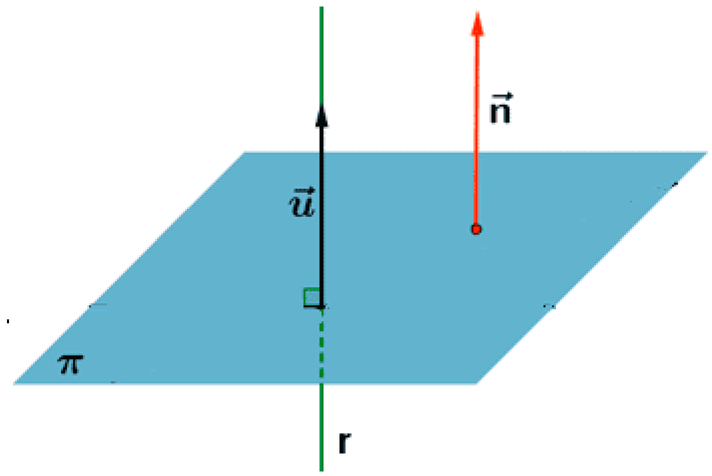
La función buscada es $f(x)=\frac{x^3}{3}-e^{-x}+2x$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

b) Calcule los dos puntos de la recta $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi: x-1=0$ es igual a 2.

a) Si el plano es perpendicular a la recta el vector normal del plano es el director de la recta.



$$r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(1,-1,0) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,0,0) \end{cases}$$

$$\pi:\begin{cases} \vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(1,0,0) \\ P(1,-1,0)\in\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi: x+D=0 \\ P(1,-1,0)\in\pi \end{cases} \Rightarrow 1+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow \boxed{\pi: x-1=0}$$

b) Un punto genérico de la recta *r* tiene coordenadas $P(\lambda,\lambda,\lambda)$.

Aplicamos la fórmula de la distancia de punto a plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-1=0 \\ P(\lambda,\lambda,\lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi)=\frac{|\lambda-1|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=|\lambda-1|$$

Como la distancia debe ser 2 tenemos las dos opciones siguientes:

$$d(P,\pi)=|\lambda-1|=2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda-1=2 \rightarrow \lambda=3 \rightarrow \boxed{P(3,3,3)} \\ o \\ \lambda-1=-2 \rightarrow \lambda=-1 \rightarrow \boxed{P(-1,-1,-1)} \end{cases}$$

6. Geometría:
a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.
b) Estudie la posición relativa de las rectas $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ y $s:\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

a) Para que tres puntos estén alineados debe cumplirse que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ indiquen la misma dirección, es decir, tengan coordenadas proporcionales.

Obtenemos las coordenadas de los dos vectores.

$$\left.\begin{array}{l} A(k,3,m) \\ B(2,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2,0,2)-(k,3,m)=(2-k,-3,2-m)$$

$$\left.\begin{array}{l} A(k,3,m) \\ C(k,2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=(k,2,0)-(k,3,m)=(0,-1,-m)$$

Sus coordenadas deben ser proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(2-k,-3,2-m) \\ \overrightarrow{AC}=(0,-1,-m) \\ \overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2-k}{0}=\frac{-3}{-1}=\frac{2-m}{-m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2-k}{0}=\frac{-3}{-1} \Rightarrow -2+k=0 \Rightarrow \boxed{k=2} \\ \frac{-3}{-1}=\frac{2-m}{-m} \Rightarrow 3m=-2+m \Rightarrow 2m=-2 \Rightarrow \boxed{m=-1} \end{cases}$$

Los valores buscados son $k = 2$ y $m = -1$.

b) Obtengamos un vector director y un punto de cada una de ellas.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(1,-1,2) \\ \overrightarrow{u_r}=(2,3,2) \end{cases}$$

$$s:\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3} \Rightarrow s:\begin{cases} Q_s(-2,-3,-1) \\ \overrightarrow{v_s}=(3,2,3) \end{cases}$$

Comprobamos primero si son paralelas o coincidentes viendo si las coordenadas de sus vectores directores son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,3,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(3,2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}\neq\frac{2}{3}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas tienen distinta dirección y se cortan o cruzan. Averiguamos en cual de las dos situaciones estamos comprobando si es nulo o no el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{P_rQ_s}=(1,-1,2)-(-2,-3,-1)=(3,2,3)\\ \overrightarrow{u_r}=(2,3,2)\\ \overrightarrow{v_s}=(3,2,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}2&3&2\\3&2&3\\3&2&3\end{vmatrix}=0$$

Por lo que los vectores son dependientes y las rectas se cortan.

Averiguamos el punto de corte resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}r:\begin{cases}P_r(1,-1,2)\\ \overrightarrow{u_r}=(2,3,2)\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=2+2\lambda\end{cases}\\ s:\begin{cases}Q_s(-2,-3,-1)\\ \overrightarrow{v_s}=(3,2,3)\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=-2+3\alpha\\ y=-3+2\alpha\\ z=-1+3\alpha\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}1+2\lambda=-2+3\alpha\\ -1+3\lambda=-3+2\alpha\\ 2+2\lambda=-1+3\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3+2\lambda=3\alpha\\ 2+3\lambda=2\alpha\\ 3+2\lambda=3\alpha\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3+2\lambda=3\alpha\\ 2+3\lambda=2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}\begin{cases}9+6\lambda=9\alpha\\ -4-6\lambda=-4\alpha\end{cases}\\ \hline 5\qquad\quad=5\alpha\end{array}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow\begin{cases}x=-2+3=1\\ y=-3+2=-1\\ z=-1+3=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{C(1,-1,2)}$$

Las rectas *r* y *s* se cortan en el punto C(1, –1, 2).

7. Estadística y Probabilidad:

a) Si $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles.

¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

• La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.

• La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

a) Si los sucesos son incompatibles significa que su intersección es vacía, es decir, $P(A\cap B)=0$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=\frac{1}{3} \\ P(B)=\frac{1}{4} \\ P(A\cap B)=0 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}=P(A)+\frac{1}{4}-0 \Rightarrow \boxed{P(A)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}}$$

Si fuesen independientes entonces se cumpliría que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=P(A)\frac{1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=\frac{1}{3} \\ P(B)=\frac{1}{4} \\ P(A\cap B)=\frac{1}{4}P(A) \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}=P(A)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=P(A)-\frac{1}{4}P(A) \Rightarrow \frac{1}{12}=\frac{3}{4}P(A) \Rightarrow P(A)=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{36} \Rightarrow \boxed{P(A)=\frac{1}{9}}$$

b) Hacemos una tabla de contingencia.

	Leen novela negra	No leen novela negra	
Leen ciencia ficción	**17**		**21**
No leen ciencia ficción			
	63		**100**

Completamos la tabla.

	Leen novela negra	No leen novela negra	
Leen ciencia ficción	**17**	**4**	**21**
No leen ciencia ficción	**46**	**33**	**79**
	63	**37**	**100**

$$P(\text{Lea novela negra/Lee ciencia ficción})=\boxed{\frac{17}{21}\simeq 0.81}$$

$$P(\text{No lee novela negra ni ciencia ficción})=\boxed{\frac{33}{100}=0.33}$$

8. Estadística y Probabilidad:
a) Calcule el valor de $P(-2\le X\le 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.
b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu-\alpha\le X\le \mu+\alpha)=0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

a) X = N(1, 3).

$$P(-2\le X\le 7)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{-2-1}{3}\le\frac{X-1}{3}\le\frac{7-1}{3}\right)=$$

$$=P(-1\le Z\le 2)=P(Z\le 2)-P(Z\le -1)=P(Z\le 2)-P(Z>1)=$$

$$=P(Z\le 2)-[1-P(Z\le 1)]=\{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\}=0.9772-[1-0.8413]=\boxed{0.8185}$$

b) X = N(**μ**, 4)

$$P(\mu-\alpha\le X\le \mu+\alpha)=0.8064\Rightarrow\{Tipificamos\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\mu-\alpha-\mu}{4}\le\frac{X-\mu}{4}\le\frac{\mu+\alpha-\mu}{4}\right)=0.8064\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-\alpha}{4}\le Z\le\frac{\alpha}{4}\right)=0.8064\Rightarrow P\left(Z\le\frac{\alpha}{4}\right)-P\left(Z\le\frac{-\alpha}{4}\right)=0.8064\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{\alpha}{4}\right)-P\left(Z>\frac{\alpha}{4}\right)=0.8064\Rightarrow P\left(Z\le\frac{\alpha}{4}\right)-\left[1-P\left(Z\le\frac{\alpha}{4}\right)\right]=0.8064\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{\alpha}{4}\right)-1+P\left(Z\le\frac{\alpha}{4}\right)=0.8064\Rightarrow 2P\left(Z\le\frac{\alpha}{4}\right)=1.8064\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{1.8064}{2}=0.9032\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos esta probabilidad}\\ \text{en la tabla N(0, 1)}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha}{4}=1.3\Rightarrow\boxed{\alpha=5.2}$$