CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade Convocatoria extraordinaria 2022

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota**: a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A.

b) Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det\left(A^{-1}B+A\right)=-1$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema: $\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{cases}$

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases} 1 & si \;\; x\le 1 \\ ax^2+bx & si \;\; x>1 \end{cases}$, sea derivable.

4. Análisis:

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ b) $\int (\sin x)\sin(\cos x)\,dx$ c) $\int x^2 \sin x dx$ d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r:\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto *P(0, 1, 0)*.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto al plano $\pi: 3x-8y+7z+8=0$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{k}=\frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax+4y+3az+2=0$ en función de los parámetros k y a. Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π.

7. Estadística y Probabilidad:

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

8. Estadística y Probabilidad:

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X<24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25-\alpha < X < 25+\alpha) = 0.2128$.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota**: a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A.

b) Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det\left(A^{-1}B+A\right)=-1$.

a) La matriz A es antisimétrica si $A^T=-A \Rightarrow A^T+A=0$.

$$\left.\begin{array}{r} A=\begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} \\ A^T+A=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_{11} & 1+a_{21} \\ 1+a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a_{11}=0 \to a_{11}=0 \\ 1+a_{21}=0 \to a_{21}=-1 \\ 2a_{22}=0 \to a_{22}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Calculamos su inversa.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=0+1=1\neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa de A}$$

$$\boxed{\mathrm{A}^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Si B no tiene inversa su determinante es nulo.

$$|B|=\begin{vmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{vmatrix}=-b_{12}=0 \Rightarrow \boxed{b_{12}=0} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^{-1}B+A$. La inversa de A está calculada en el apartado a).

$$A^{-1}B+A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1-b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la condición de que $\det\left(A^{-1}B+A\right)=-1$

$$\det\left(A^{-1}B+A\right)=-1 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1-b_{22} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1 \Rightarrow 1-b_{22}=-1 \Rightarrow \boxed{2=b_{22}}$$

Los valores buscados son $b_{12}=0$ y $b_{22}=2$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema: $\begin{cases}(m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3\end{cases}$

Transformamos el sistema en otro más sencillo de estudiar.

$$\begin{cases}(m+1)x+my+z=0 \\ y+(m-2)z=-2 \\ (m+1)x+my+(m-1)z=-3\end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 3^{a} - \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{rrrr}(m+1)x & +my & +(m-1)z & =-3 \\ -(m+1)x & -my & -z & =0 \\ \hline & & (m-2)z & =-3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{a}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(m+1)x+my+z=0 \\ y+(m-2)z=-2 \\ (m-2)z=-3\end{cases}$$

Observando los elementos de la diagonal del sistema nos planteamos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $m \neq 2$ y $m \neq -1$

En este caso el sistema se puede resolver despejando y resolviendo en cadena.
El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 2$

En este caso el sistema queda $\begin{cases}3x+2y+z=0 \\ y=-2 \\ 0=-3\end{cases}$

La tercera ecuación plantea una igualdad imposible.
El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $m = -1$

En este caso el sistema queda $\begin{cases}-y+z=0 \\ y-3z=-2 \\ -3z=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-y+z=0 \\ y-3z=-2 \\ \boxed{z=1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-y+1=0 \\ y-3=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=1 \\ \boxed{y=1}\end{cases}$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).
Las soluciones son: $x=t,\ y=1,\ z=1,\ t \in \mathbb{R}$

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases}1 & si \ \ x\le 1\\ ax^2+bx & si \ \ x>1\end{cases}$, sea derivable.

a) Hallamos la tangente a $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

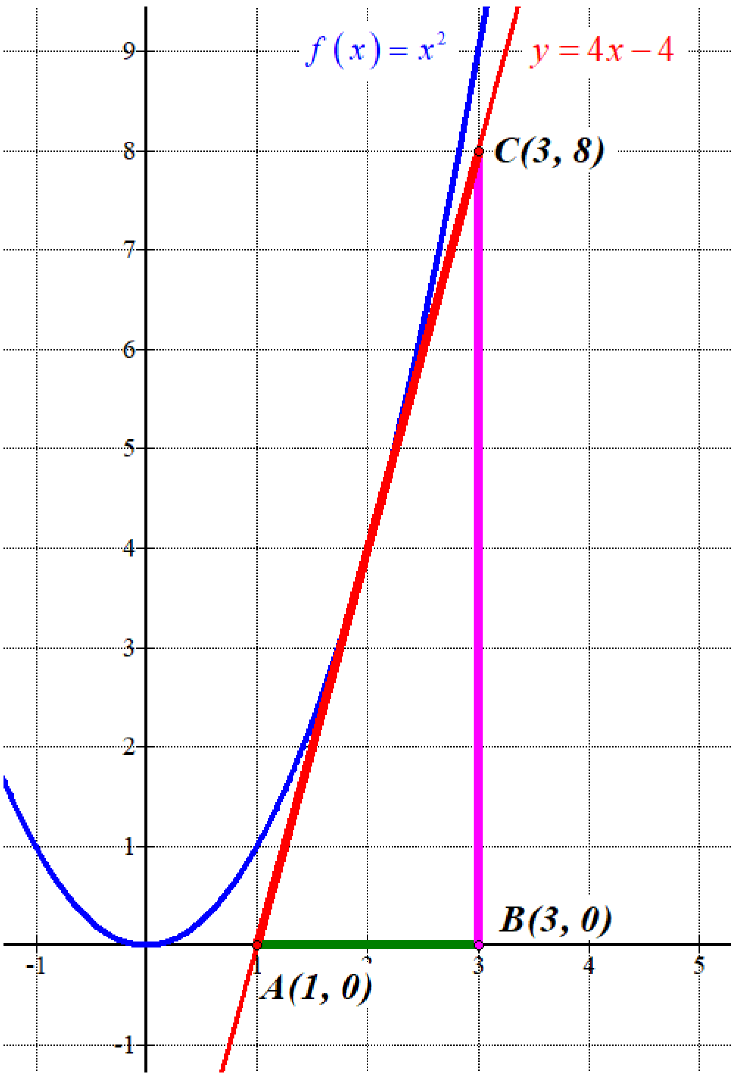
$$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x \Rightarrow f'(2)=4$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2^2=4\\ f'(2)=4\\ y-f(2)=f'(2)(x-2)\end{array}\right\} \Rightarrow y-4=4(x-2) \Rightarrow y-4=4x-8 \Rightarrow \boxed{y=4x-4}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la situación planteada.

x	$f(x)=x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9

x	$y=4x-4$
1	0
2	4
3	8



Las coordenadas de los vértices del triángulo son A(1, 0), B(3, 0) y C(3, 8).

b) Para ser derivable primero debe ser continua.
Continua en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax^2 + bx = a + b \\ f(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a + b = 1}$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ y su derivada es $f\,'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ 2ax + b & si \quad x > 1 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f\,'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 0 = 0 \\ f\,'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} f\,'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2ax + b = 2a + b \\ f\,'(1^-) = f\,'(1^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{2a + b = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 1 - a \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a + 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow \boxed{b = 1 - (-1) = 2}$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = 2$.

4. Análisis:
Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ b) $\int (\sin x)\sin(\cos x)dx$ c) $\int x^2 \sin x dx$ d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$

a)

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ x^2+1=t \to 2xdx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{2x}\end{array}\right\} = \int \cancel{2x}\sqrt{t}\frac{dt}{\cancel{2x}} = \int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} =$$

$$= \frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} = \left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ t=x^2+1\end{array}\right\} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+K}$$

b)

$$\int (\sin x)\sin(\cos x)dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \cos x = t \Rightarrow -sinxdx = dt\\ dx=\dfrac{dt}{-sinx}\end{array}\right\} = \int \left(\cancel{\sin x}\right)\sin(t)\frac{dt}{-\cancel{sinx}} =$$

$$= -\int \sin(t)dt = \cos t = \left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el}\\ \text{cambio de variable}\\ t=\cos x\end{array}\right\} = \boxed{\cos(\cos x)+K}$$

c)

$$\int x^2 \sin xdx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x^2 \to du=2xdx\\ dv=\sin xdx \to v=\int \sin xdx = -\cos x\end{array}\right\} = x^2(-\cos x) - \int(-\cos x)2xdx =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx = \ldots$$

$$\boxed{\int x\cos xdx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x \to du=dx\\ dv=\cos xdx \to v=\int \cos xdx = senx\end{array}\right\} = xsenx - \int senxdx = xsenx-(-\cos x)}$$

$$\ldots = -x^2\cos x + 2(xsenx+\cos x) = \boxed{-x^2\cos x + 2xsenx + 2\cos x + K}$$

d)

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \ldots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$1 = A(x-2)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 1 = B \\ x=1 \rightarrow 1 = -A \rightarrow A = -1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\ldots = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-2}dx = \boxed{-\ln|x-1| + \ln|x-2| + K}$$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$ y pasa por el punto *P(0, 1, 0)*.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto al plano $\pi:3x-8y+7z+8=0$.

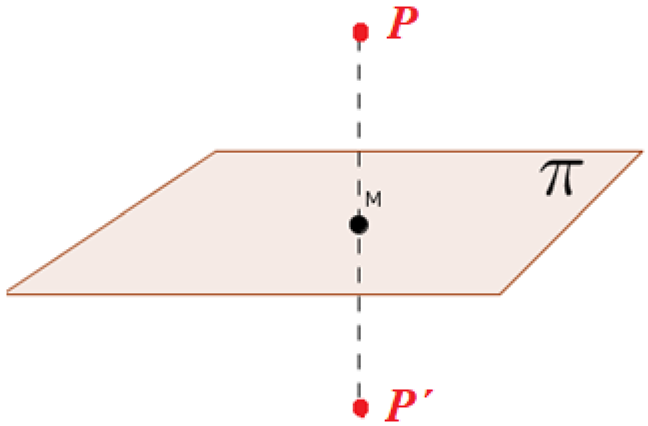
a) El plano que contiene a la recta tiene como uno de sus vectores directores el director de la recta $\vec{v_r}=(3,2,1)$. El otro vector director del plano es el vector $\overrightarrow{PQ_r}$ que une el punto P con un punto Q_r de la recta.

$$r:\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{1}\Rightarrow r:\begin{cases}Q_r(-1,-2,-3)\\ \vec{v_r}=(3,2,1)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{PQ_r}=(-1,-2,-3)-(0,1,0)=(-1,-3,-3)\\ \vec{v}=\vec{v_r}=(3,2,1)\\ P(0,1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x & y-1 & z\\ -1 & -3 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x-9y+9-2z+9z+y-1+6x=0\Rightarrow \boxed{\pi:3x-8y+7z+8=0}$$

b) Debemos de hallar el punto P´ del dibujo.



Hallamos la recta *s* perpendicular al plano que pasa por el punto P.

$$\pi:3x-8y+7z+8=0\Rightarrow \vec{n}=(3,-8,7)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_s}=\vec{n}=(3,-8,7)\\ P(11,-14,13)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{s\equiv\begin{cases}x=11+3\lambda\\ y=-14-8\lambda\\ z=13+7\lambda\end{cases}}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{r}\pi : 3x-8y+7z+8=0 \\ s \equiv \begin{cases} x=11+3\lambda \\ y=-14-8\lambda \\ z=13+7\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 3(11+3\lambda)-8(-14-8\lambda)+7(13+7\lambda)+8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33+9\lambda+112+64\lambda+91+49\lambda+8=0 \Rightarrow 122\lambda=-244 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=11-6=5 \\ y=-14+16=2 \Rightarrow \boxed{M(5,2,-1)} \\ z=13-14=-1 \end{cases}$$

El punto P´ simétrico de P respecto del plano π se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM}=(5,2,-1)-(11,-14,13)=(-6,16,-14)$$

$$P'=M+\overrightarrow{PM}=(5,2,-1)+(-6,16,-14)=(-1,18,-15)$$

El punto P´ simétrico de P respecto del plano π tiene coordenadas $P'(-1,18,-15)$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{k}=\frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax+4y+3az+2=0$ en función de los parámetros k y a. Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π.

Obtenemos un punto y un vector de la recta.

$$r:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{k}=\frac{z}{3}\Rightarrow r:\begin{cases} P_r(-1,1,0) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,k,3)\end{cases}$$

Para que plano y recta sean paralelos o la recta esté contenida en el plano el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares, es decir, con producto escalar 0.

$$\left.\begin{array}{r} \pi: ax+4y+3az+2=0\rightarrow \vec{n}=(a,4,3a) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,k,3)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=(a,4,3a)(1,k,3)=a+4k+9a=10a+4k$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\Rightarrow 10a+4k=0\Rightarrow \boxed{5a+2k=0}$$

Se plantean dos situaciones diferentes.

Si $5a+2k\neq 0$ entonces recta y plano son secantes. Coinciden en un único punto.

Si $5a+2k=0$ entonces plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Para que la recta esté contenida en el plano el punto P_r de la recta debe pertenecer al plano.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(-1,1,0)\in\pi \\ \pi: ax+4y+3az+2=0\end{array}\right\}\Rightarrow -a+4+2=0\Rightarrow \boxed{a=6}$$

Esta última situación se divide en dos situaciones diferentes:

Si $5a+2k=0$ y $a=6$ la recta está contenida en el plano.

Si $5a+2k=0$ y $a\neq 6$ recta y plano son paralelos.

Resumiendo: Si $5a+2k\neq 0$ recta y plano son secantes. Si $5a+2k=0$ y $a\neq 6$ recta y plano son paralelos. Si $5a+2k=0$ y $a=6$ la recta está contenida en el plano.

Esta última condición se traduce en $\left.\begin{array}{r} 5a+2k=0 \\ a=6\end{array}\right\}\Rightarrow 30+2k=0\Rightarrow k=-15$.

Si $k=-15$ y $a=6$ la recta está contenida en el plano.

¿En qué situaciones recta y plano son perpendiculares?

El vector normal del plano y el director de la recta deben tener coordenadas proporcionales, pues deben indicar la misma dirección.

$$\left.\begin{array}{r} \pi: ax+4y+3az+2=0\rightarrow \vec{n}=(a,4,3a) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,k,3) \\ \vec{n}\parallel\overrightarrow{v_r}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{4}{k}=\frac{3a}{3}\Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{4}{k}\Rightarrow \boxed{a\cdot k=4}$$

La condición es que $a\cdot k=4$.

7. Estadística y Probabilidad:

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

a)

Si el 60% de los clásicos son novelas significa que $0.60 \cdot 0.40 = 0.24$, el 24 por ciento del total son novelas y clásicos.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Novela	No novela	
Clásicos	**24**		**40**
No clásicos			
	70		**100**

Completamos la tabla.

	Novela	No novela	
Clásicos	**24**	**16**	**40**
No clásicos	**46**	**14**	**60**
	70	**30**	**100**

Mirando en la tabla tenemos que la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico es del $16/100 = 0.16$.

Mirando en la tabla tenemos que la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela es $\dfrac{\text{Nº de novelas y clásicos}}{\text{Nº de novelas}} = \dfrac{24}{70} \simeq 0.343$

b) El suceso contrario a "se resuelva por lo menos 1" es que no se resuelva ninguno.

$$P(\text{Se resuelva al menos 1}) = 1 - P(\text{No se resuelve ninguno}) = 1 - 0.80 \cdot 0.80 \cdot 0.80 = \boxed{0.488}$$

8. Estadística y Probabilidad:
a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.
b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X<24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P\left(25-\alpha < X < 25+\alpha\right) = 0.2128$.

a)

Resolvemos el problema utilizando la distribución binomial.
X = Número de aciertos al responder 60 preguntas.

Los parámetros son n = 60 y p = probabilidad de acertar una pregunta = 1/4 = 0.25.

X = B(60, 0.25)

Aproximamos esta binomial por una normal pues el número de repeticiones es muy alto.

Comprobamos la bondad de la aproximación.
n · p = 60 · 0.25 =15 > 5 y también n · q = 60 · 0.75 = 45 >5. La aproximación es buena.

Aproximamos la binomial por una normal de parámetros media = $\mu = np = 15$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \simeq 3.35$

X = B(60, 0.25) se aproxima con una normal $Y = N\left(15, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$

Nos piden calcular $P\left(X \geq 16\right)$.

$$P\left(X \geq 16\right) = \left\{\text{Corrección de Yates}\right\} = P\left(Y \geq 15.5\right) = 1 - P\left(Y \leq 15.5\right) =$$

$$= \left\{Tipificamos\right\} = 1 - P\left(Z \leq \frac{15.5-15}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}\right) = 1 - P\left(Z \leq 0.15\right) =$$

$$= \left\{\text{Miramos en la tabla}\right\} = 1 - 0.5596 = \boxed{0.4404}$$

b) X(25, 2)

$$P\left(X < 24\right) = \left\{Tipificamos\right\} = P\left(Z < \frac{24-25}{2}\right) = P\left(Z < -0.5\right) =$$

$$= P\left(Z \geq 0.5\right) = 1 - P\left(Z \leq 0.5\right) = \left\{\text{Miramos en la tabla}\right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$

Respondemos a la segunda cuestión.

$$P(25-\alpha < X < 25+\alpha) = P(X < 25+\alpha) - P(X < 25-\alpha) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z < \frac{25+\alpha-25}{2}\right) - P\left(Z < \frac{25-\alpha-25}{2}\right) = P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z < \frac{-\alpha}{2}\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z \geq \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

Como debe ser igual a 0.2128 tenemos que:

$$2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0.2128 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 1.2128 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1.2128}{2} = 0.6064$$

Buscamos en la tabla y tenemos que:

$$\frac{\alpha}{2} = 0.27 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.54}$$