Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2021
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} 5-ax^2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{6}{ax} & si \quad x>1 \end{cases} , \quad a\in\mathbb{R}, a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcule los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua.

b) (1 punto) Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = e$ sea 6 u^2.

2) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} .$$

3) Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{e^x}{x^3-x}$$

a) (1,25 puntos) Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

b) (0,75 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 2$.

5) Dada la siguiente matriz:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudie el rango de la matriz $A=I+P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k\in\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Para k = 1, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

6) Dadas las siguientes matrices:

$$B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.

b) (1 punto) Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: $I+BX=C_1C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases}3x-y+2z=1\\ x+4y+z=3\\ 2x-5y+az=-2\end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.

8) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, –2, 0) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1, 0, 1), (3, 1, 0) y (2, –1, 1). Exprésela como intersección de dos planos.

9) En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 correspondían a coches eléctricos.

a) (0,8 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.

b) (1,2 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

10) Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?

b) (1,2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

SOLUCIONES

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} 5-ax^2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{6}{ax} & si \quad x>1 \end{cases} \quad , \quad a\in\mathbb{R},\, a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcule los valores de $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua.
b) (1 punto) Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = e$ sea 6 u^2.

a) La función es continua en $(-\infty,1)$ pues es un polinomio, también es continua en $(1,+\infty)$ pues el denominador de la fracción solo se anula en $x = 0$ que no pertenece al intervalo $(1,+\infty)$. Solo falta comprobar la continuidad en $x = 1$, donde la función cambia de definición. Para ello debe cumplirse que $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=5-a\cdot 1^2=5-a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 5-ax^2=5-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{6}{ax}=\dfrac{6}{a} \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 5-a=\frac{6}{a}\Rightarrow 5a-a^2=6\Rightarrow a^2-5a+6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} =\dfrac{5-1}{2}=2 \\ =\dfrac{5+1}{2}=3 \end{cases}$$

La función es continua cuando $a = 2$ o $a = 3$.

b) El área debemos dividirla en dos partes, una entre $x = 0$ y $x = 1$ y la otra entre $x = 1$ y $x = e$.

La parábola $y=5-ax^2$ corta el eje en $x=\sqrt{\dfrac{5}{a}}=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{5}{2}}=\pm 1.58 \\ o \\ \sqrt{\dfrac{5}{3}}=\pm 1.29 \end{cases}$, por lo que ninguno de los valores pertenece al intervalo (0, 1).

$$\int_0^1 5-ax^2dx=\left[5x-a\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left[5-a\frac{1^3}{3}\right]-\left[0-a\frac{0^3}{3}\right]=5-\frac{a}{3}=\begin{cases} \boxed{a=2}\to 5-\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{3} \\ o \\ \boxed{a=3}\to 5-\dfrac{3}{3}=4 \end{cases}$$

La función $y=\dfrac{6}{ax}$ no corta el eje OX.

$$\int_1^e \frac{6}{ax}dx = \frac{6}{a}\int_1^e \frac{1}{x}dx = \left[\frac{6}{a}\ln|x|\right]_1^e = \frac{6}{a}\ln|e| - \frac{6}{a}\ln|1| = \frac{6}{a} = \begin{cases} \boxed{a=2} \rightarrow \frac{6}{2} = 3 \\ o \\ \boxed{a=3} \rightarrow \frac{6}{3} = 2 \end{cases}$$

Por lo que para $a = 2$ el área del recinto es $\frac{13}{3} + 3 = \frac{22}{3}\,u^2$ y para $a = 3$ el área del recinto es $4 + 2 = 6\ u^2$, por lo que el valor de "a" que cumple lo pedido es $a = 3$.

2) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}.$$

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}=In\det er\min ación$$

Tomamos logaritmo neperiano para convertir la indeterminación en un producto.

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=a\Rightarrow \lim_{x\to 1}\ln\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=\ln a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)=\ln a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{(1-x)^2}=\frac{\ln\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{(1-1)^2}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L´Hôpital)=$$

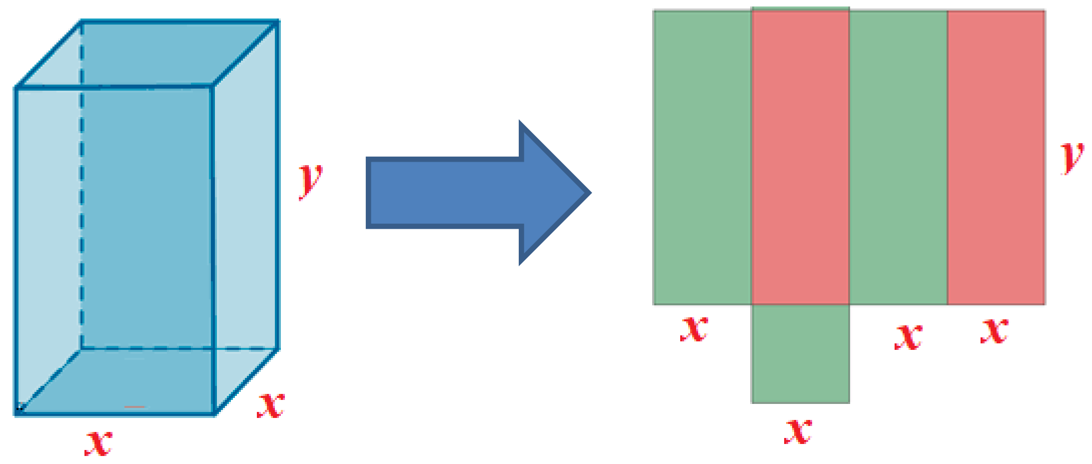
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}{-2(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{-2(1-x)sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-2(1-1)sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{0}{0}=$$

$$=In\det er\min ación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 1}\frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)-2(1-x)\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=$$

$$=\frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-2(1-1)\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}=-\frac{\pi^2}{8}=\ln a\Rightarrow a=e^{-\frac{\pi^2}{8}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=e^{-\frac{\pi^2}{8}}}$$

3) Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.



El volumen es 64 m^3 → $x^2y = 64$

Área lateral son 4 rectángulos de lados x e y → $\text{Área lateral} = 4xy$

Área de la base es un cuadrado de lado x → $\text{Área base} = x^2$

El coste del material de construcción es $C(x,y) = 70 \cdot 4xy + 140x^2 = 280xy + 140x^2$

Como tenemos que $x^2y = 64 \Rightarrow y = \frac{64}{x^2}$ y sustituyendo en la función coste nos queda:

$$C(x,y) = 280x\frac{64}{x^2} + 140x^2 \Rightarrow C(x) = \frac{17920}{x} + 140x^2 \ .$$

Buscamos minimizar el coste. Derivamos la función e igualamos a cero.

$$C(x) = \frac{17920}{x} + 140x^2 \Rightarrow C'(x) = -\frac{17920}{x^2} + 280x$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{17920}{x^2} + 280x = 0 \Rightarrow \frac{17920}{x^2} = 280x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17920 = 280x^3 \Rightarrow x^3 = \frac{17920}{280} = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Calculamos la derivada segunda y vemos su signo en $x = 4$.

$$C'(x) = -\frac{17920}{x^2} + 280x \Rightarrow C''(x) = 2\frac{17920}{x^3} + 280 \Rightarrow C''(4) = 2\frac{17920}{4^3} + 280 > 0$$

Por lo que en $x = 4$ la función coste $C(x) = \frac{17920}{x} + 140x^2$ presenta un mínimo relativo.

Como $x = 4$ entonces $y = \frac{64}{x^2} = \frac{64}{16} = 4$.

El depósito con menor coste tiene de base un cuadrado de lado 4 metros y su altura es 4 metros. Sería un cubo de arista 4 metros.

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{e^x}{x^3-x}$$

a) (1,25 puntos) Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

b) (0,75 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 2$.

a) El dominio de la función son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$x^3-x=0\Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x^2-1=0\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm1\end{cases}$$

$$Dominio\ de\ f\left(x\right)=\mathbb{R}-\left\{0,1,-1\right\}$$

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x = 0$?

$$\lim_{x\to0}f\left(x\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^0}{0^3-0}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

¿$x = 1$?

$$\lim_{x\to1}f\left(x\right)=\lim_{x\to1}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^1}{1^3-1}=\frac{e}{0}=\infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

¿$x = -1$?

$$\lim_{x\to-1}f\left(x\right)=\lim_{x\to-1}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^{-1}}{\left(-1\right)^3+1}=\frac{e^{-1}}{0}=\infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L\acute{}Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L\acute{}Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L\acute{}Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$$

No hay asíntota horizontal en $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^3-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}\left(x^3-x\right)}=\frac{1}{e^{+\infty}\left(-\infty\right)}=\frac{1}{\infty}=0$$

La función tiene asíntota horizontal en $-\infty$ con ecuación $y = 0$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene asíntota oblicua en $-\infty$, pues tiene horizontal.

Veamos si la tiene en +∞.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^3-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^4-x^2}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{4x^3-2x}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{12x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{24x}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{24}=\frac{\infty}{24}=0$$

No tiene asíntota oblicua.

b) La recta tangente a la curva en el punto $x = 2$ tiene ecuación $y-f(2)=f´(2)(x-2)$.

$$f(x)=\frac{e^x}{x^3-x}\Rightarrow f´(x)=\frac{e^x\left(x^3-x\right)-\left(3x^2-1\right)e^x}{\left(x^3-x\right)^2}=\frac{e^x\left(x^3-x-3x^2+1\right)}{\left(x^3-x\right)^2}=\frac{e^x\left(x^3-3x^2-x+1\right)}{\left(x^3-x\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}f(2)=\dfrac{e^2}{2^3-2}=\dfrac{e^2}{6}\\ f´(2)=\dfrac{e^2\left(2^3-3\cdot2^2-2+1\right)}{\left(2^3-2\right)^2}=-\dfrac{5e^2}{36}\\ y-f(2)=f´(2)(x-2)\end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{e^2}{6}=-\frac{5e^2}{36}(x-2)\Rightarrow \boxed{y=-\frac{5e^2}{36}x+\frac{4e^2}{9}}$$

5) Dada la siguiente matriz:

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -k & -2k\\ 1 & -k & 0\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudie el rango de la matriz $A=I+P$, donde *I* es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k\in\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Para *k = 1*, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

a)

$$A=I+P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -k & -2k\\ 1 & -k & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-k & -2k\\ 1 & -k & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-k & -2k\\ 1 & -k & 1\end{vmatrix}=1-k-2k-k-1+k-1-2k^2=-2k^2-3k-1$$

$$|A|=0\Rightarrow -2k^2-3k-1=0\Rightarrow 2k^2+3k+1=0\Rightarrow$$

$$k=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-8}}{4}=\frac{-3\pm 1}{4}=\begin{cases}\dfrac{-3-1}{4}=-1=k\\ \dfrac{-3+1}{4}=-\dfrac{1}{2}=k\end{cases}$$

Si k es distinto de –1 y de $-\frac{1}{2}$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

Si *k = –1* la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Observamos que la columna 2ª y 3ª son iguales, pero diferentes a la 1ª, el rango de A es 2. También podemos razonarlo tomando el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª (= fila 1ª) y la columna 3ª (= columna 2ª) cuyo determinante vale $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$. El rango de A es 2

Si $k=-\frac{1}{2}$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3/2 & 1\\ 1 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$. Observamos que la columna 1ª y 3ª son iguales, pero diferentes a la 2ª, el rango de A es 2. También podemos razonarlo tomando el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª cuyo determinante vale $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3/2\end{vmatrix}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\neq 0$. El rango de A es 2

Resumiendo: Si $k\neq -1\ y\ k\neq -\frac{1}{2}$ el rango de A es 3. Si $k=-1\ o\ k=-\frac{1}{2}$ el rango de A es 2.

b) Para $k = 1$ el determinante de A es no nulo y podemos hallar su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0-2-1-0-1-2 = -6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{-6} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}}$$

6) Dadas las siguientes matrices:

$$B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.

b) (1 punto) Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: $I+BX=C_1C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

a)

El determinante de B es $|B|=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-3+1+1+1-1-3=-4\neq 0$. Por lo que existe su matriz inversa B^{-1}.

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}}{-4}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{B^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -2\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & -1\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$I+BX=C_1C_2\Rightarrow BX=C_1C_2-I\Rightarrow X=B^{-1}\left(C_1C_2-I\right)$$

Sustituimos el valor de las matrices y determinamos X.

$$C_1C_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3 & 2+2 & 0+1\\ -3-3 & 6-2 & 0-1\\ -1+0 & 2+0 & 0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -6 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{2\ \cdot\ 2}\times 3\longrightarrow 3\times 3$$

$$C_1C_2-I=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -6 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -6 & 3 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$X=B^{-1}\left(C_1C_2-I\right)=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -6 & 3 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & 2+1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ -3-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}+1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}-3+1 & -2+\frac{3}{2}-2 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{pmatrix}$

Hallamos el determinante de A y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 12a - 2 - 10 - 16 + a + 15 = 13a - 13$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 13a - 13 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Distinguimos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente triangular y analizamos el rango de A y de A/B con más facilidad.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a} \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -12 & -3 & -9 \\ \hline 0 & -13 & -1 & -8 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 2^a} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a} \\ 2 & -5 & 1 & -2 \\ -2 & -8 & -2 & -6 \\ \hline 0 & -13 & -1 & -8 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 3^a} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila 3ª} - \text{Fila 2ª}} \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & 13 & 1 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila 3ª}} \end{array}\right\} \Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como la última fila es todo ceros el rango de A y el de A/B es 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

c) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A/B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Lo resolvemos por el método de Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -13$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2-30+16+5}{-13} = \frac{7}{13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2-4-12+6}{-13} = \frac{8}{13}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-24-6-5-8-2+45}{-13} = 0$$

La solución es $x = \frac{7}{13};\ y = \frac{8}{13};\ z = 0$

8) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, –2, 0) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1, 0, 1), (3, 1, 0) y (2, –1, 1). Exprésela como intersección de dos planos.

Hallamos la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1, 0, 1), B(3, 1, 0) y C(2, –1, 1).

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3,1,0)-(1,0,1)=(2,1,-1) \\ v = AC = (2,-1,1)-(1,0,1)=(1,-1,0) \\ A(1,0,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y-2z+2-z+1-x+1=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+y+3z-4=0}$$

Si la recta r es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+3z-4=0$ el vector director de la recta es el normal del plano → $\vec{v_r} = \vec{n} = (1,1,3)$.

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P(1, –2, 0) y con vector director $\vec{v_r} = (1,1,3)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = (1,1,3) \\ A(1,-2,0)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}$$

Como nos piden expresarla como intersección de dos planos.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} \to x-1 = y+2 \to x-y-3=0 \\ \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{3} \to 3y+6 = z \to 3y-z+6=0 \end{cases}$$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{cases}}$$

9) En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 correspondían a coches eléctricos.
a) (0,8 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.
b) (1,2 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

Utilizamos una tabla de contingencia para obtener la información que viene implícita con los datos del problema.

	Con errores en software	Sin errores en software	TOTALES
Coches eléctricos	**12**		**85**
Coches híbridos			**145**
TOTALES	**43**		

Completamos la tabla.

	Con errores en software	Sin errores en software	TOTALES
Coches eléctricos	**12**	**73**	**85**
Coches híbridos	**31**	**114**	**145**
TOTALES	**43**	**187**	**230**

Respondemos a las preguntas aplicando la regla de Laplace.

a) Hay 114 coches híbridos sin errores en software. Y un total de 230 coches.

$$P(\text{Híbrido y sin errores en software}) = \frac{114}{230} = \boxed{\frac{57}{115} \simeq 0.496}$$

b) Hay 145 coches híbridos y de ellos 31 con errores en software.

$$P(\text{Con errores en software / Híbrido}) = \boxed{\frac{31}{145} \simeq 0.21}$$

10) Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.
a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?
b) (1,2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

Consideramos X la variable aleatoria que cuenta el número de deportistas de la selección española de gimnasia deportiva elegidos para las próximas olimpiadas.
El número de repeticiones es n = 9 y la probabilidad de que sea elegido un deportista de la selección es p = 1/7.
X es una variable binomial. N = 9, p = 1/7, q = 6/7
X = B(9, 1/7)

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de una binomial.

$$P(X=2)=\binom{9}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^2\left(\frac{6}{7}\right)^7=\frac{9\cdot 8}{2}\cdot\frac{6^7}{7^9}\boxed{\simeq 0.25}$$

b) Consideramos el suceso contrario a "Al menos 1 es elegido para las olimpiadas" que es "Ninguno es elegido para las olimpiadas".

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+...+P(X=9)=$$

$$=1-P(X=0)=1-\binom{9}{0}\left(\frac{1}{7}\right)^0\left(\frac{6}{7}\right)^9=1-\left(\frac{6}{7}\right)^9\simeq\boxed{0.75}$$