Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + mz &= m \\ mx + (m-1)y + z &= 2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

a) *(1 punto)* Determine los valores del parámetro *m* para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1 punto)* Encuentre las soluciones de ese sistema cuando *m* = 1.

c) *(1 punto)* Considere las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1, & 2, -1 \end{pmatrix}$$

Determine el rango de la matriz producto *CD*.

SOLUCIÓN

a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ m & m-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Estudiemos sus rangos según los posibles valores de m :

En la matriz A, el mayor rango posible es 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m-1+m^2+1-m\cdot(m-1)-m-1 = m-1+m^2+1-m^2+m-m-1 = m-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1$$

▪ Para $m \neq 1$: : $\operatorname{rg}A = \operatorname{rg}B = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado

▪ Para $m = 1$: $\operatorname{rg}A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Estudiemos ahora el rango de B. Para ello, orlamos el menor anterior con los términos independientes (sustituyendo m por 1, naturalmente):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg}B = 2$$

Por lo tanto: $\operatorname{rg}A = \operatorname{rg}B = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado y es equivalente al sistema: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \quad + z = 2 \end{cases}$

Consideramos z como un parámetro: $z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1-\lambda \\ x \quad = 2-\lambda \end{cases} \Rightarrow x = 2-\lambda \;,\; y = 1-\lambda-2+\lambda = -1$

Luego las soluciones son: $x = 2-\lambda$, $y = -1$, $z = \lambda$

c) $CD=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & -2 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

La matriz CD solo tiene una fila linealmente independiente pues la segunda fila es la opuesta de la primera y la tercera es el vector nulo. Por tanto: $\text{rg } CD=1$

2. *(1,5 puntos)* Determine la ecuación del plano que pasa por el punto (0, 0, 0) y contiene a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-y-2=0\\3y-2z+4=0\end{cases}$$

SOLUCIÓN

La ecuación del haz de planos (conjunto de los planos que contienen a una recta) es: $2x-y-2+\lambda\left(3y-2z+4\right)=0$

Seleccionemos de entre todos ellos el que pasa por el punto $\left(0,0,0\right)$:

$$2\cdot 0-0-2+\lambda\left(3\cdot 0-2\cdot 0+4\right)=0 \;\Rightarrow\; -2+4\lambda=0 \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Luego el plano buscado es: $2x-y-2+\frac{1}{2}\left(3y-2z+4\right)=0 \;\Rightarrow\; 2x+\frac{1}{2}y-z=0 \;\Leftrightarrow\; 4x+y-2z=0$

3. *(4 puntos)*

a) Considere la función:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

a.1.) *(1 punto)* Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2.) *(1 punto)* Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

a.3.) (1 *punto)* Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=2$.

b) (1 *punto)* Calcule:

$$\int\frac{x^2-3x+3}{x-1}\,dx$$

SOLUCIÓN

a) a.1) Se trata de una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores de x que anulen al denominador. El denominador es una función irracional pero como $x^2+1>0\ \forall x \;\Rightarrow\; \exists\sqrt{x^2+1}\neq 0\ \forall x \;\Rightarrow\; \text{Dom}\left(f\right)=\mathbb{R}$

- Asíntotas verticales: no tiene pues la función no tiende a ∞ cuando x tiende a algún valor determinado.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=1 \;\Rightarrow\; y=1 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{-\infty}{+\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=-1 \;\Rightarrow\; y=-1 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x\to-\infty$$

- Asíntotas oblicuas $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{x^2+1}}=0 \;\Rightarrow\; \text{se trata de las asíntotas horizontales, ya obtenidas}$$

a.2) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{\dfrac{x^2+1-x^2-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1-x}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}=0 \;\Rightarrow\; x=1$ (punto crítico)

$$f''(x)=\frac{-1\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}-(1-x)\left[2x\cdot\sqrt{x^2+1}+\left(x^2+1\right)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right]}{\left(x^2+1\right)^3}\;\Rightarrow\; f''(1)<0 \;\Rightarrow\; x=1$$ es un máximo relativo. Además: $f(1)=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ luego la función tiene un máximo relativo en $\left(1,\sqrt{2}\right)$

a.3) $f(2)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5} \;\Rightarrow\;$ el punto de tangencia es $\left(2,\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

La pendiente de la recta tangente es: $f'(2)=\dfrac{1-2}{5\cdot\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{25}$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y-\frac{3\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{25}(x-2) \;\Leftrightarrow\; 25y-15\sqrt{5}=-\sqrt{5}x+2\sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{5}x+25y-17\sqrt{5}=0$$

b) Realicemos la división entre ambos polinomios (a la derecha):

$$\begin{array}{l|l} x^2-3x+3 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x-2 \\ \quad -2x+3 & \\ \quad\; 2x-2 & \\ \hline \qquad\quad 1 & \end{array}$$

Tenemos entonces: $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+3}{x-1}dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x-1|+C$

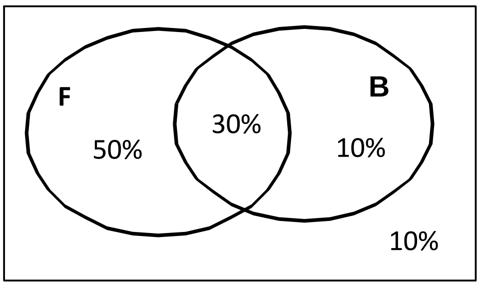
4. *(1,5 puntos)* Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes.

a) *(0,75 puntos)* Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?

b) *(0,75 puntos)* Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

SOLUCIÓN.

Sea F el suceso "le gusta el fútbol" y B el suceso "le gusta el balonmano". Los porcentajes de alumnos a los que les gusta uno de los dos deportes, ambos o ninguno es:



a) $p\left(F\cup B\right)=p(F)+p(B)-p\left(F\cap B\right)=0{,}80+0{,}40-0{,}30=0{,}9$

b) Nos encontramos ante una experiencia dicotómica en la que prestamos atención a si ocurre el suceso F (éxito) o su contrario $\overline{F}$. Cuando se repite n veces una experiencia dicotómica y nos preguntamos por la probabilidad de obtener un determinado número de éxitos, estamos ante una distribución binomial.

En nuestro caso, el número de veces que se repite la experiencia es 10 y la probabilidad de éxito (a un alumno elegido al azar le gusta el futbol) es $p=p(F)=0{,}8$ y la de su contrario $k=p\left(\overline{F}\right)=0{,}2$.

La probabilidad de obtener 3 éxitos es:

$$p(F=3)=\binom{10}{3}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^7=\frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^7=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0{,}512\cdot 0{,}0000128=0{,}0008$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine los valores del parámetro *k* para los que la matriz:

$$A - k\,I$$

tenga inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la matriz X que verifica que:

$$(A - 3\,I)X = 2\,I$$

siendo I la matriz identidad de orden 3 y *A* la matriz que aparece al comienzo del enunciado.

SOLUCIÓN

a) $A - kI = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 1 \\ 0 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 3-k \end{pmatrix}$

Para que la matriz tenga inversa, su determinante debe ser distinto de 0.

$$\left| A - kI \right| = \begin{vmatrix} 3-k & 0 & 1 \\ 0 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 3-k \end{vmatrix} = -k \cdot \left(9 - 6k + k^2\right) + k = -k^3 + 6k^2 - 8k = 0 \;\Rightarrow\; k\left(-k^2 + 6k - 8\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ -k^2 + 6k - 8 = 0 \;\Rightarrow\; k = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{-2} = \dfrac{-6 \pm 2}{-2} = \begin{cases} k = 2 \\ k = 4 \end{cases} \end{cases} \;\Rightarrow\; \exists \left(A - kI\right)^{-1} \;\; \forall k \neq 0\,,2 \text{ y } 4$$

b) $\left(A - 3I\right)X = 2I \;\Rightarrow\; X = \left(A - 3I\right)^{-1} \cdot 2I$

Obtengamos las matrices que necesitamos:

$\left(A - 3I\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y calculemos su inversa: $\left| A - 3I \right| = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjunta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}} \left(A - 3I\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tenemos: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. *(1,5 puntos)* Considere el plano: $\pi: \; 2ax + y + az = 4$ y la recta:

$$r: \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

a) *(0,75puntos)* Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de *a*.

b) *(0,75 puntos)* Para *a* = 2, determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto *P*(0,1,0).

SOLUCIÓN

a) La recta y el plano pueden ser secantes (se cortan en un punto), paralelos (no tienen puntos comunes) o la recta contenida en el plano (todos los puntos de la recta pertenecen al plano).

Si consideramos el sistema formado por las dos ecuaciones que definen a la recta y la ecuación del plano, el sistema de tres ecuaciones así formado puede ser compatible determinado (recta y plano secantes), incompatible (recta y plano paralelos) o compatible indeterminado (recta contenida en el plano).

$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ -x+y+2z=3 \\ 2ax+y+az=4 \end{cases}$ Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2a & 1 & a & 4 \end{array}\right)$

Estudiemos sus rangos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2a & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 1 + 4a - 2a + a - 4 = 5a - 5 = 0 \;\Rightarrow\; a = 1$$

▪ Luego para $a \neq 1$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado $\Rightarrow$ la recta y el plano son secantes.

▪ Para $a = 1$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 \neq 0$

Orlemos el menor anterior con los términos independientes para conocer el rango de B:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 6 - 2 - 4 - 6 + 4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} B = 3$$

Como $\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} B \;\Rightarrow$ el sistema es incompatible $\Rightarrow$ la recta y el plano son paralelos

b) El plano es $4x + y + 2z = 4 \;\Rightarrow$ el vector $\vec{n} = (4, 1, 2)$ es normal al plano y, por tanto, direccional de cualquier recta perpendicular al plano. Como además la recta pasa por el punto $P(0, 1, 0)$, la ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$$

3. *(4 puntos)*

a) *(2 puntos)* Determine los valores de los parámetros *a*, *b* y *c* para que la función:

$$f(x) = a\,(x-1)^3 + b\,x + c$$

a.1.) Pase por el punto (1, 1)

a.2.) En el punto (1, 1) su tangente tenga de pendiente 2.

a.3.) En el punto $x = 2$ tenga un máximo relativo.

b) *(2 puntos)* Determine el valor del límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} \right)^{\frac{3x^2 - 1}{x}}$$

SOLUCIÓN

a) $f(x)=a(x-1)^3+bx+c$

▪ Por pasar por el punto $(1,1)$: $\quad 1=b+c$

▪ En el punto $(1,1)$ su tangente tiene pendiente 2: $\quad f'(1)=2 \;\Rightarrow\;$ Como $f'(x)=3a(x-1)^2+b$: $\; b=2$

▪ En el punto $x=2$ tiene un máximo relativo: $\quad f'(2)=0 \;\Rightarrow\; 3a+b=0$

De las tres condiciones se sigue: $\quad a=-\frac{2}{3}\;,\; b=2\;,\; c=-1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}-1\right)\cdot\frac{3x^2-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2-x^2+2x}{x^2-2x}\right)\cdot\frac{3x^2-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+2}{x^2-2x}\right)\cdot\frac{3x^2-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3+6x^2+x-2}{x^3-2x^2}\right)}=e^{-3}$

4. *(1,5 puntos)* En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: *A, B* y *C*. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría A; el 25 % a la categoría B y el resto a la categoría C.

Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría A un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría *B* un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría *C* un 60 % habla inglés.

c) (0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?

d) (0,75 *puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SI habla inglés, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría *C*?

SOLUCIÓN

Organicemos los datos en una tabla de contingencia. Partamos de que el total de trabajadores de la empresa es 200 (por ejemplo). A la categoría A pertenecen entonces $200\cdot 0{,}30=60$ de los que $60\cdot 0{,}05=3$ hablan inglés. A la categoría B pertenecen $200\cdot 0{,}25=50$ de los que $50\cdot 0{,}20=10$ hablan inglés. A la categoría C pertenecen $200\cdot 0{,}45=90$ de los que $90\cdot 0{,}60=54$ hablan inglés:

	A	B	C	TOTAL
Inglés (I)	3	10	54	**67**
No inglés	57	40	36	**133**
TOTAL	**60**	**50**	**90**	**200**

a) $p(I)=\frac{67}{200}=0{,}335$

b) $p(C/I)=\frac{54}{67}=0{,}806$