EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2017
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Sea "m" una constante real. Determine para qué valores de "m" el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 0 \\ 4x - y + m^2 z &= m - 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & m^2 & m-1 \end{pmatrix}$

El único menor de orden 3 de A es:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = 15m^2 + 16 - 4 - 24 + 5 - 8m^2 = 7m^2 - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -1 \ , \ m = 1$$

Tenemos entonces:

▪ Para $m \neq -1$ y $m \neq 1$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

▪ Para $m = -1$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 \neq 0$.

Orlamos este menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -30 + 16 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} B = 3$

Y como $\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} B \Rightarrow$ el sistema es incompatible para $m = -1$.

▪ Para $m = 1$: el menor de B resultante de orlar el menor no nulo de A es ahora: $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} B = 2$

Luego $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado para $m = 1$.

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi : x - 2y + z = 1 \qquad \pi' : \begin{cases} x = 2\lambda + \mu \\ y = \lambda + \mathbf{k}\,\mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real $\mathbf{k}$.

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman esos planos cuando $\mathbf{k} = 3$.

SOLUCIÓN.

a) ▪ El vector $\vec{n}=(1,-2,1)$ es perpendicular al plano π.

▪ Los vectores $\vec{u}=(2,1,0)$ y $\vec{v}=(1,k,-1)$ están contenidos en el plano π' y, por tanto, el vector $\vec{n}'=\vec{u}\times\vec{v}$ es perpendicular a π': $\vec{n}'=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+2k\vec{k}-\vec{k}+2\vec{j}=(-1,2,2k-1)$

Los dos planos pueden ser: coincidentes o paralelos si los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tienen la misma dirección o secantes si los vectores tienen distinta dirección.

Los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tienen la misma dirección si sus coordenadas son proporcionales:

$$\vec{n}\,//\,\vec{n}' \iff \frac{1}{-1}=\frac{-2}{2}=\frac{1}{2k-1} \Rightarrow 2k-1=-1 \Rightarrow k=0$$

Tenemos entonces:

▪ Para $k=0$: $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tienen la misma dirección $\Rightarrow$ los planos coinciden o son paralelos. Para precisar su posición veamos si tienen algún punto común (coinciden) o no tienen puntos comunes (paralelos).

El punto $P(2\lambda+\mu,\lambda,1-\mu)$ es un punto cualquiera de π'. Veamos si pertenece también al plano π comprobando si verifica o no su ecuación: $2\lambda+\mu-2\lambda+1-\mu=1 \Rightarrow P\in\pi \Rightarrow$ los planos son coincidentes.

▪ Para $k\neq 0$: los vectores tienen distinta dirección y los planos son secantes.

b) Para $k=3$ los planos π y π' son secantes. El ángulo que forman coincide con el ángulo que forman sus vectores normales $\vec{n}$ y $\vec{n}'$: $\vec{n}=(1,-2,1)$, $\vec{n}'=(-1,2,5)$.

$$\cos\alpha=\cos(\pi,\pi')=\cos(\vec{n},\vec{n}')=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{|\vec{n}||\vec{n}'|}=\frac{-1-4+5}{\sqrt{1+4+1}\,\sqrt{1+4+25}}=0 \Rightarrow \alpha=90^{\circ} \Rightarrow \text{ los planos son perpendiculares.}$$

3. *(4 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x)}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función.

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, sus asíntotas.

c) *(2 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función $f(x)$ así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.

a) $f(x)$ es una función racional. Su dominio está formado por todos los valores reales que no anulen el denominador. Por tanto: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

b) ▪ Asíntotas verticales: $x=-1$ pues $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2}{(1+x)}=\infty$

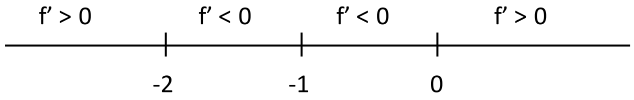
▪ Asíntotas horizontales: no existen pues $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+x)}=\infty$

▪ Asíntotas oblicuas $y=mx+n$:

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+x^2}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x-x^2}{1+x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{1+x}\right)=-1 \end{array}\right| \Rightarrow y=x-1$$

c) $f'(x)=\dfrac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{x(2+x)}{(1+x)^2}=0 \;\Rightarrow\; x(2+x)=0 \;\Rightarrow\; x=-2\;,\;x=0$ (valores críticos)

Estudiemos el signo de la primera derivada en los intervalos cuyos extremos son los valores críticos y el punto de discontinuidad $x=-1$: $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$ y $(0,+\infty)$



$f'(-3)>0$; $f'(-1{,}5)<0$; $f'(-0{,}5)<0$; $f'(1)>0$

Luego la función es creciente en los intervalos $(-\infty,-2)$ y $(0,+\infty)$ y decreciente en $(-2,-1)$ y $(-1,0)$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento nos ofrecen la siguiente información:

La función tiene un máximo relativo en $x=-2$: $(-2,-4)$ y un mínimo relativo en $x=0$: $(0,0)$

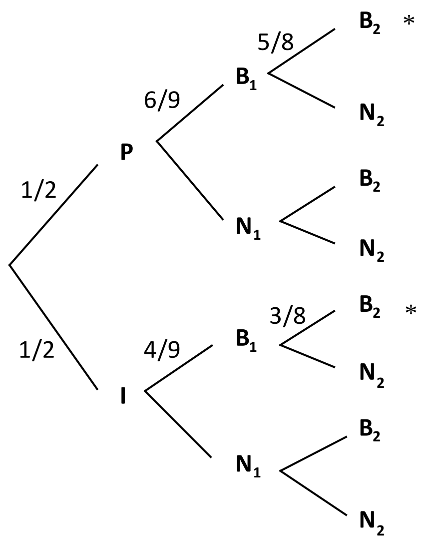
4. *(1 punto)* Se dispone de dos cajas con bolas blancas y negras. La caja *A* contiene 6 bolas blancas y 3 negras; y la caja *B* contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se lanza un dado y si sale par se sacan dos bolas de la caja *A*, una tras otra, sin reponer ninguna. Por su parte, si sale impar al lanzar el dado se sacan dos bolas de la caja *B*, también una tras otra, sin reponer ninguna.

¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas?

SOLUCIÓN.

Sean los sucesos: P = “sale par al lanzar el dado”, I = “sale impar al lanzar el dado”, B_1 = “la primera bola extraída es blanca”, N_1 = “la primera bola extraída es negra”, B_2 = “la segunda bola es blanca y N_2 = “la segunda bola es negra”.

Representemos la situación mediante un diagrama en árbol:



Se trata de una aplicación del teorema de la probabilidad total.

$$p(B_1\cap B_2)=p(P)\cdot p(B_1\cap B_2)+p(I)\cdot p(B_1\cap B_2)=$$

$$=p(P)\cdot p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(I)\cdot p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{30}{144}+\frac{12}{144}=\frac{42}{144}=\frac{7}{24}\simeq 0{,}2917$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Sea k una constante real y considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & k & 3k+2\\ 1 & 0 & -k\end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.

b) *(1 punto)* Si $k=2$, calcule la inversa de A, si existe.

c) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

SOLUCIÓN.

a) La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & k & 3k+2\\ 1 & 0 & -k\end{vmatrix}=-k^2-4k=-k(k+4)=0 \;\Rightarrow\; k=0\;,\; k=-4 \;\Rightarrow\; \exists\, A^{-1}\;\; \forall k\neq -4 \text{ y } 0$$

b) Para $k=2$, existe la matriz inversa de A pues $|\,A\,|=-2\cdot 6=-12\neq 0$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 8\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(Adj A)*}} \begin{pmatrix}-4 & 8 & -2\\ 0 & -6 & 0\\ -8 & -8 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(Adj A)}^t} \begin{pmatrix}-4 & 0 & -8\\ 8 & -6 & -8\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{A^{-1}=1/|A|\cdot(\text{Adj A})^t} \begin{pmatrix}1/3 & 0 & 2/3\\ -2/3 & 1/2 & 2/3\\ 1/6 & 0 & -1/6\end{pmatrix}$$

*Adjuntos de los elementos de A:

$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-4$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 8\\ 1 & -2\end{vmatrix}=8$, $A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 4\\ 0 & -2\end{vmatrix}=0$, $A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-6$, $A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0$,

$A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 2 & 8\end{vmatrix}=-8$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 8\end{vmatrix}=-8$, $A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$

Así pues: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 2/3\\ -2/3 & 1/2 & 2/3\\ 1/6 & 0 & -1/6\end{pmatrix}$ $\qquad A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 8\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 2/3\\ -2/3 & 1/2 & 2/3\\ 1/6 & 0 & -1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$

c)
- Según el apartado a): $\text{rg}A=3 \;\; \forall k\neq -4 \text{ y } 0$
- Para $k=-4$: $\text{rg}A=2$ pues el menor $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{vmatrix}=-4\neq 0$
- Para $k=0$: $\text{rg}A=2$ pues el menor $\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-3y+z=4\\ \phantom{2x-{}}y+z=0\end{cases}$$

y pasa por el punto $P:(2,1,-1)$.

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi : 2x - 3y + z = 4$$
$$\pi' : \qquad y + z = 0$$

SOLUCIÓN.

a) Necesitamos un punto y un vector direccional. El punto es el dado, $P(2,1,-1)$, y como vector direccional nos sirve cualquiera de los vectores direccionales de la recta r. Para obtenerlo necesitamos dos puntos cualesquiera de r:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=4 \\ \quad y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Para } z=0:\ y=0\ ,\ x=2 \ \Rightarrow\ A(2,0,0) \\ \text{Para } z=-1:\ y=1\ ,\ x=4 \ \Rightarrow\ B(4,1,-1) \end{matrix} \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)$$

La recta pedida es entonces: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1} \\ \dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=2y-2 \\ -y+1=z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

b) El ángulo α que forman los dos planos es el mismo que el que forman sus vectores normales: $\vec{n}=(2,-3,1)$ y $\vec{n}'=(0,1,1)$:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{|\vec{n}||\vec{n}'|}=\frac{-3+1}{\sqrt{4+9+1}\,\sqrt{0+1+1}}=\frac{-2}{\sqrt{28}}=\frac{-2}{2\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{7}}{7}\simeq -0{,}378 \Rightarrow \alpha=112^{\circ}\ 12'\ 27{,}56''$$

3. *(4 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine los valores de *"a"* y *"b"* para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 1/e^{x} & \text{si } x\le 0 \\ a\cos(x)+b & \text{si } 0<x\le\pi \\ sen(x)-ax & \text{si } \pi<x \end{cases}$$

b) *(1,5 puntos)* Calcule la integral:

$$\int x^2(\ln x)^2\,dx$$

c) *(1,5 puntos)* Determine el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}$$

SOLUCIÓN.

a) Las tres funciones que definen a $f(x)$ son continuas en los intervalos en que están definidas. Debemos exigir entonces que la función sea continua en $x=0$ y en $x=\pi$, y para que esto ocurra debe ser: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)$.

$$\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x}=\lim\limits_{x\to 0}(a\cos x+b) \Rightarrow 1=a+b \\ \lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to \pi}(a\cos x+b)=\lim\limits_{x\to \pi}(\operatorname{sen}x-ax) \Rightarrow -a+b=-a\pi \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (1-\pi)a-b=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\pi)a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2-\pi}\ ,\ b=1-a=1-\frac{1}{2-\pi}=\frac{1-\pi}{2-\pi}$$

b) Utilizaremos el método de integración por partes: $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

$$\int x^2 (\ln x)^2\,dx = \left| \begin{array}{l} u = (\ln x)^2 \;\Rightarrow\; du = 2\ln x\,\frac{1}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right| = \frac{1}{3}x^3 (\ln x)^2 - \int \frac{1}{3}x^3\, 2\ln x\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{3}\int x^2 \ln x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right| = \frac{1}{3}x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3\,\frac{1}{x}\,dx\right] = \frac{1}{3}x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{9}\int x^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{9}\frac{x^3}{3} + K = \frac{1}{3}x^3 (\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}x^3 + K$$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(e^{x-1}-1\right)^{x-1} = 0^0$ indeterminación. Sea $L = \lim\limits_{x\to 1}\left(e^{x-1}-1\right)^{x-1}$, aplicamos logaritmo neperiano a los dos miembros:

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 1}\left(e^{x-1}-1\right)^{x-1}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\ln\left(e^{x-1}-1\right)^{x-1}\right] = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)\ln\left(e^{x-1}-1\right)\right] = 0\cdot(-\infty)$$ (x debe tender a 1^+) =

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(e^{x-1}-1\right)}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\infty}{\infty} =$$ (aplicamos la regla de L'Hôpital) $$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2 e^{x-1}}{-e^{x-1}+1} = \frac{0}{0} =$$ (aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital) $$= \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)e^{x-1} + (x-1)^2 e^{x-1}}{-e^{x-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}(x-1)(2+x-1)}{-e^{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left[-(x-1)(1+x)\right] = 0 \;\Rightarrow\; L = e^0 = 1$$

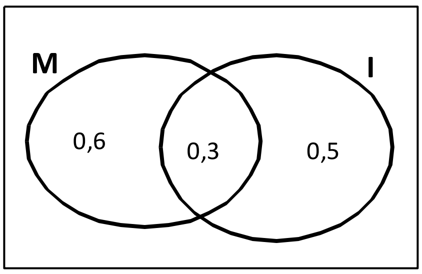
4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

a) *(0,5 puntos)* Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos).

b) *(0,5 puntos)* Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

SOLUCIÓN.

Sean M el suceso "aprueba Matemáticas" e I el suceso "aprueba Inglés".



Se tiene: $p(M) = \frac{60}{100} = 0,6$; $p(I) = 0,5$; $p(M \cap I) = 0,3$

a) Se trata de calcular la probabilidad de la unión de ambos sucesos:

$$p(M \cup I) = p(M) + p(I) - p(M \cap I) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$$

b) $p(M/I) = \frac{p(M \cap I)}{p(I)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$