Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Determine para qué valores de k el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 6 \\ x + ky + z &= 0 \\ kx - y + z &= -6 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Resuélvalo, si es posible, cuando $k = -1$.

SOLUCIÓN.

La matriz A de los coeficientes y la matriz B ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 6 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ k & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Estudiemos y comparemos el rango de ambas matrices según los valores de k:

El mayor rango posible de ambas es 3. El único menor de orden 3 de A es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = k + k - k - k^3 - 1 + 1 = -k^3 + k = 0 \;\Rightarrow\; k\left(-k^2 + 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; k = 0 \;,\; k = -1 \;,\; k = 1$$

▪ Para $k \neq 0, -1$ y 1 : $\text{rg}A = \text{rg}B = 3 = $ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

▪ Para $k = 0$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right)$

Como el menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}A = 2$

Orlamos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}A = \text{rg}B = 2 < \text{ nº de incógnitas } \Rightarrow \text{ el sistema es compatible indeterminado.}$$

▪ Para $k = -1$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right)$

Como el menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,A = 2$

Orlemos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 6-6-6+6=0 \Rightarrow \text{rg}\,A = \text{rg}\,B = 2 < \text{nº de incógnitas} \Rightarrow \text{el sistema es compatible indeterminado}$$

▪ Para $k=1$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right)$

El menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,A = 2$

Orlemos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -6-6-6+6=-12 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,B = 3 \Rightarrow \text{rg}\,A \neq \text{rg}\,B \Rightarrow \text{el sistema es incompatible}$$

b) Para $k=-1$ el sistema es compatible indeterminado. Consideremos las dos primeras ecuaciones y la incógnita z como parámetro ($z=\lambda$):

$$\begin{cases} x+y=6+\lambda \\ x-y=-\lambda \end{cases} \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \;,\; y=3+\lambda \;,\; z=\lambda$$

2. *(2 puntos)* Determine la ecuación de la recta, **expresada como intersección de dos planos**, que pasa por el punto $(1,-1,2)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $A=(1,0,1)$, $B=(3,2,1)$, $C=(2,-1,0)$.

SOLUCIÓN.

El vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ es perpendicular al plano y, por tanto, direccional de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (1,-1,-1) \end{array}\right| \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{k} - 2\vec{k} + 2\vec{j} = (-2,2,-4) \,//\, (1,-1,2)$$

La ecuación continua de la recta es: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+1=y+1 \\ 2x-2=z-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ que es la ecuación de la recta expresada como intersección de dos planos.

3. *(5 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine, si existen, todos los valores de los parámetros a y b para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a\,e^{x} & si \;\; x<0 \\ 1-x^2 & si \;\; 0 \le x < 1 \\ b(1-e^{x-1}) & si \;\; x \ge 1 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Considere ahora que $a=1$. Usando la definición de derivada, estudie si la función es derivable en $x=0$.

c) *(1,5 puntos)* Determine:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(ln(x)\right)^{\frac{1}{e^x}}$$

d) *(1,5 puntos)* Determine:

$$\int \frac{(ln(x))^2}{\sqrt{x}}\,dx$$

SOLUCIÓN.

a) Las funciones definidas en cada uno de los trozos son continuas (exponencial, polinómica). Habrá que exigir la continuidad de la función en los puntos de empalme $x=0$ y $x=1$:

▪ Continuidad en $x=0$: debe ser $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(ae^x\right)=ae^0=a\\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(1-x^2\right)=1\end{array}\right| \Rightarrow\ a=1$$

▪ Continuidad en $x=1$: debe ser $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(1-x^2\right)=0\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[b\left(1-e^{x-1}\right)\right]=b\left(1-e^0\right)=0\end{array}\right| \Rightarrow\ \text{la función es continua en } x=1 \text{ independientemente del valor de b.}$$

Por tanto, la función es continua para $a=1$ y $\forall\, b$.

b) La función, en el entorno de $x=0$, está definida así: $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0\\ 1-x^2 & \text{si } 0\le x<1\end{cases}$

Para $a=1$ sabemos que la función es continua en $x=0$. Recordemos que $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y que para que la función sea derivable en $x=a$ debe ser $f'(a^-)=f'(a^+)\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{1}=1\\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(-x\right)=0\end{array}\right| \Rightarrow\ f'(0^-)\ne f'(0^+)\ \Rightarrow\ \text{la función no es derivable}$$

en $x=0$

c) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{1}{e^x}}=\infty^0$ (indeterminación) $\Rightarrow\ \ln L=\ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{1}{e^x}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\ln x\right)^{\frac{1}{e^x}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{e^x}\ln\left(\ln x\right)\right]=\dfrac{\infty}{\infty}=$

(L'Hôpital) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot e^x}=0\ \Rightarrow\ L=e^0=1$

d) Resolvamos la integral por el método de partes:

$$I=\int\frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}\,dx=\left|\begin{array}{l}u=\left(\ln x\right)^2\ \Rightarrow\ du=2\left(\ln x\right)\cdot\dfrac{1}{x}\,dx\\ dv=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx\ \Rightarrow\ v=\int x^{-1/2}\,dx=\dfrac{x^{1/2}}{1/2}=2\sqrt{x}\end{array}\right|=2\sqrt{x}\cdot\left(\ln x\right)^2-\int 2\sqrt{x}\cdot2\left(\ln x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=2\sqrt{x}\cdot(\ln x)^2-4\int(\ln x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\left|\begin{array}{c} u=\ln x \;\Rightarrow\; du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;\Rightarrow\; v=\int x^{-1/2}\,dx=\frac{x^{1/2}}{1/2}=2\sqrt{x}\end{array}\right|=$$

$$=2\sqrt{x}\cdot(\ln x)^2-4\left[2\sqrt{x}\ln x-\int 2\sqrt{x}\,\frac{1}{x}\,dx\right]=2\sqrt{x}\cdot(\ln x)^2-8\sqrt{x}\ln x+8\int x^{-1/2}\,dx=2\sqrt{x}\cdot(\ln x)^2-8\sqrt{x}\ln x+16\sqrt{x}+C$$

<u>OPCIÓN B</u>

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine la matriz inversa, si existe, de la matriz siguiente:

$$M=\begin{pmatrix}2&-1&2\\0&-1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}$$

En caso de que exista, compruebe que la matriz encontrada es efectivamente la inversa de la matriz M.

b) *(1,5 puntos)* Determine la matriz A^2+B^2 siendo A y B las matrices solución del siguiente sistema:

$$2A+B=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) $|M|=\begin{vmatrix}2&-1&2\\0&-1&0\\2&-2&1\end{vmatrix}=-2+4=2\neq 0 \;\Rightarrow\; \exists M^{-1}$

Calculemos la matriz inversa: $M=\begin{pmatrix}2&-1&2\\0&-1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{Adj(M)} Adj(M)=\begin{pmatrix}-1&0&2\\-3&-2&2\\2&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{(Adj(M))^t}$ (*)

$M_{11}=\begin{vmatrix}-1&0\\-2&1\end{vmatrix}=-1$, $M_{12}=-\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}=0$, $M_{13}=\begin{vmatrix}0&-1\\2&-2\end{vmatrix}=2$, $M_{21}=-\begin{vmatrix}-1&2\\-2&1\end{vmatrix}=-3$, $M_{22}=\begin{vmatrix}2&2\\2&1\end{vmatrix}=-2$
$M_{23}=-\begin{vmatrix}2&-1\\2&-2\end{vmatrix}=2$, $M_{31}=\begin{vmatrix}-1&2\\-1&0\end{vmatrix}=2$, $M_{32}=-\begin{vmatrix}2&2\\0&0\end{vmatrix}=0$, $M_{33}=\begin{vmatrix}2&-1\\0&-1\end{vmatrix}=-2$

(*) $\xrightarrow{(Adj(M))^t} (Adj(M))^t=\begin{pmatrix}-1&-3&2\\0&-2&0\\2&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{M^{-1}} M^{-1}=\frac{(Adj(M))^t}{|M|}=\begin{pmatrix}-1/2&-3/2&1\\0&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$

Comprobemos que M^{-1} es la matriz inversa de M:

$M\cdot M^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\0&-1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/2&-3/2&1\\0&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$ luego, en efecto, lo es.

b) Calculemos las matrices A y B:

$$\left.\begin{array}{l} 2A+B=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\end{array}\right| \Rightarrow \text{ Sumando: } 3A=\begin{pmatrix}2&3\\3&0\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}2/3&1\\1&0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=A-\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3&2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^2=\begin{pmatrix}2/3&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2/3&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13/9&2/3\\2/3&1\end{pmatrix} \\ B^2=\begin{pmatrix}-1/3&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/3&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/9&-2/3\\0&0\end{pmatrix}\end{array}\right| \Rightarrow A^2+B^2=\begin{pmatrix}13/9&2/3\\2/3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/9&-2/3\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14/9&0\\2/3&1\end{pmatrix}$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine el valor del parámetro "a" para que el plano

$$\pi : x-3y+az=-6$$

sea paralelo a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-3y=1\\ x+3z=-7\end{cases}$$

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo entre esa recta r y el plano:

$$\tilde{\pi} : 2x-3y-z+6=0$$

SOLUCIÓN.

a) El vector $\vec{n}=(1,-3,a)$ es normal al plano π.

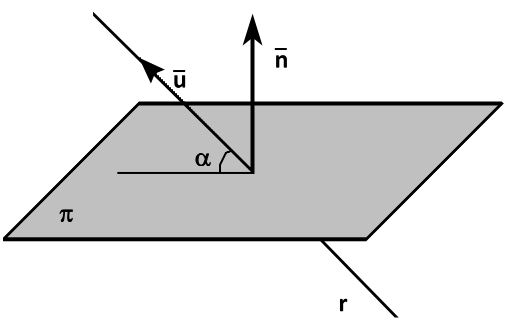
Obtengamos un vector $\vec{u}$ direccional de la recta r. Para ello, necesitamos obtener dos puntos de la misma:

$$\begin{cases}2x-3y=1\\ x+3z=-7\end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\text{Para } x=-1:\ y=-1\ ,\ z=-2 \Rightarrow A(-1,-1,-2)\\ \text{Para } x=2:\ y=1\ ,\ z=-3 \Rightarrow B(2,1,-3)\end{array}\right| \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,2,-1)$$

El plano y la recta son paralelos si los vectores $\vec{n}$ y $\vec{u}$ son perpendiculares $\Leftrightarrow$ $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$:

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=3-6-a=0 \Rightarrow a=-3$$

b) $\vec{n}=(2,-3,-1)$ es un vector normal al plano π y $\vec{u}=(3,2,-1)$ un vector direccional de la recta r. El ángulo α que forman la recta y el plano es el complementario del que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$.



De la definición del producto escalar se tiene:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\,|\vec{n}|}=\frac{|6-6+1|}{\sqrt{9+4+1}\,\sqrt{4+9+1}}=\frac{1}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90^\circ-\alpha=85^\circ\,54'\,14{,}24'' \Rightarrow \alpha=4^\circ\,5'\,45{,}76''$$

3. *(5 puntos)*

a) *(3 puntos)* Considere la función:

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

a. 1) *(1,5 puntos)* Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a. 2) *(1,5 puntos)* Determine los extremos relativos y puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

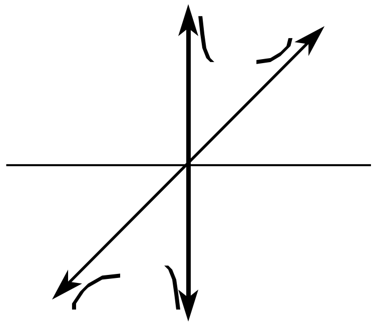
b) *(2 puntos)* Determine el área limitada por la curva $f(x) = -2\, sen\left(\frac{x}{2}\right)$, y las rectas $x = 0$, $x = \pi$ y el eje de abcisas $y = 0$.

SOLUCIÓN.

a.1) ▪ Dominio: $f(x) = x + \frac{4}{x} = \frac{x^2+4}{x}$ es una función racional cuyo dominio es: $D(f) = \mathbb{R} - \{\, 0\, \}$.

▪ Asíntotas: La función tiene una asíntota vertical $x = 0$ pues $\lim_{x\to 0}\left(x + \frac{4}{x}\right) = \infty$. La posición relativa de la curva respecto a la asíntota es:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{4}{x}\right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{4}{x}\right) = +\infty$$



La forma en que está expresada la función nos indica que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua de la función. La posición relativa de la curva respecto a la asíntota es:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{4}{x}\right) = 0^- \quad , \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4}{x}\right) = 0^+$$

a.2) $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2\,,\; x = 2$ (puntos críticos)

$f''(x) = \frac{8x}{x^4} = \frac{8}{x^3}$ | $f''(-2) < 0 \;\Rightarrow$ En $x = -2$ la función tiene un máximo relativo: $(-2\,,-4)$
$f''(2) > 0 \;\Rightarrow$ En $x = 2$ la función tiene un mínimo relativo: $(2\,,4)$

Puesto que $f''(x) \neq 0 \;\; \forall x \in D(f)$ la función no tiene puntos de inflexión.

b) Calculemos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas:

$-2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{2} = 0 + k\pi \;\Rightarrow\; x = 2k\pi \;\Rightarrow\; x = 0\,,\; x = 2\pi\,,\; \ldots$ luego entre $x = 0$ y $x = \pi$ no hay otros puntos de corte.

Tenemos:

$$A = \left| \int_0^{\pi} \left[-2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx \right| = \left| -4 \int_0^{\pi} \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot \frac{1}{2}\, dx \right| = \left| \left[4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} \right| = \left| \left(4\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(4\cos 0\right) \right| = |-4| = 4\ u^2$$