PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2015

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) *(2 puntos)* Determine el rango de esa matriz según los valores de λ.

b) *(1 punto)* Determine para qué valores de λ existe la inversa de esa matriz y determine la inversa, si existe, cuando $\lambda = -2$.

SOLUCIÓN

a) Sea A la matriz dada. El rango es el orden del mayor menor no nulo. Calculemos el determinante de la matriz:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+1) - \lambda(\lambda+1) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

▪ Si $\lambda \neq -1, 0, 1$: $|A| \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A = 3$.

▪ Si $\lambda = -1$: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A = 2$

▪ Si $\lambda = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A = 2$

▪ Si $\lambda = 1$: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A = 2$

b) A es una matriz cuadrada 3×3 que tiene inversa cuando su rango es el máximo, es decir cuando $\text{rg}\,A = 3 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists A^{-1}$ para $\lambda \neq -1, 0, 1$. Por lo tanto, para $\lambda = -2$ existe A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; |A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$$

▪ Calculemos la matriz adjunta de A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \;;\; A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \;;\; A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \;;\; A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \;;\; A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \;;\; A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \;;\; A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;;\; A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

Luego $\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&3&-3\\-2&0&2\end{pmatrix}$

▪ La matriz traspuesta de la adjunta: $\left(\text{Adj}(A)\right)^t=\begin{pmatrix}4&0&-2\\0&3&0\\2&-3&2\end{pmatrix}$

▪ Por último: $A^{-1}=\dfrac{\left(\text{Adj}(A)\right)^t}{|A|}=\begin{pmatrix}-2/3&0&1/3\\0&-1/2&0\\-1/3&1/2&-1/3\end{pmatrix}$

Comprobemos que la matriz obtenida es, en efecto, la matriz inversa de la dada:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&-2&0\\1&-2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2/3&0&1/3\\0&-1/2&0\\-1/3&1/2&-1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases}-x-2y+12=0\\3y-z-15=0\end{cases}\qquad s:\ \frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{3}$$

b) *(1 punto)* Calcule la distancia entre esas rectas.

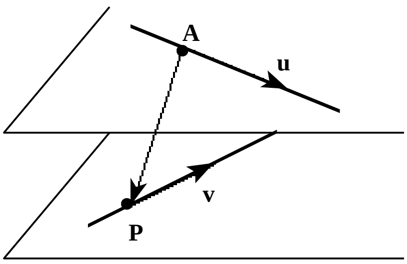
SOLUCIÓN

a) Obtengamos un punto y un vector de cada una de las rectas:

$$r:\begin{cases}x-2y+12=0\\3y-z-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2y+12\\z=3y-15\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\text{Para } y=0:\ x=12\ ,\ z=-15\ \Rightarrow\ A(12,0,-15)\\\text{Para } y=1:\ x=10\ ,\ z=-12\ \Rightarrow\ B(10,1,-12)\end{matrix}\Rightarrow\left|\begin{matrix}A(12,0,-15)\\\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-2,1,3)\end{matrix}\right.$$

$$s:\ \frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{3}\Rightarrow\left|\begin{matrix}P(2,-3,0)\\\vec{v}=(5,2,3)\end{matrix}\right.$$

Puesto que las coordenadas de los vectores direccionales $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, las rectas se cruzan o se cortan.



Consideremos el vector $\overrightarrow{AP}$ con origen en un punto de r y extremo en un punto de s: $\overrightarrow{AP}=(-10,-3,15)$.

Estudiemos la dependencia o independencia de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AP}$:

$\begin{vmatrix}-2&1&3\\5&2&3\\-10&-3&15\end{vmatrix}=-60-45-30+60-75-18\neq0\ \Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes $\Rightarrow$ las rectas se cruzan.

b) Hallemos el plano π que contiene a r y es paralelo a s.

El vector $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&1&3\\5&2&3\end{vmatrix}=3\vec{i}+15\vec{j}-4\vec{k}-5\vec{k}+6\vec{j}-6\vec{i}=-3\vec{i}+21\vec{j}-9\vec{k}=(-3,21,-9)\parallel(1,-7,3)$ es perpendicular al plano π. La ecuación de π es: $x-7y+3z+D=0$ y como el punto A pertenece al plano:

$$12-45+D=0\ \Rightarrow\ D=33\ \Rightarrow\ \pi:\ x-7y+3z+33=0$$

Por tanto: $d(r,s)=d(s,\pi)=d(P,\pi)=\left|\dfrac{2+21+33}{\sqrt{1+49+9}}\right|=\dfrac{56}{\sqrt{59}}$ u

3. *(5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$$

Determine los máximos relativos, los mínimos relativos y los puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t = cos(x)$, calcule:

$$\int \frac{cos^2(x)}{sen(x)} dx$$

c) *(2 puntos)*

1) *(1 punto)* Calcule los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, 2)$.

2) *(1 punto)* Calcule el área encerrada por la curva $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ y la parte positiva del eje OX.

SOLUCIÓN

a) $f'(x) = \dfrac{2xe^x - (x^2-3)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(2x - x^2 + 3)}{e^{2x}} = \dfrac{-x^2+2x+3}{e^x} \quad \Rightarrow$

$$f''(x) = \frac{(-2x+2)e^x - (-x^2+2x+3)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-2x+2+x^2-2x-3)}{e^{2x}} = \frac{x^2-4x-1}{e^x}$$

▪ Los puntos de máximo y de mínimo relativo están entre las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ (puntos críticos):

$$-x^2+2x+3=0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2\pm 4}{-2} = \begin{cases} -1 \;\Rightarrow\; f(-1) = -2/e^{-1} = -2e \;\Rightarrow\; (-1, -2e) \\ 3 \;\Rightarrow\; f(3) = 6/e^3 \;\Rightarrow\; (3, 6/e^3) \end{cases}$$

Para discernir si los puntos críticos son máximos o mínimos relativos los sustituimos en $f''(x)$:

$f''(-1) = \dfrac{1+4-1}{e^{-1}} = 4e > 0 \;\Rightarrow\;$ el punto $(-1, -2e)$ es un mínimo relativo de la función.

$f''(3) = \dfrac{9-12-1}{e^3} = \dfrac{-4}{e^3} < 0 \;\Rightarrow\;$ el punto $\left(3, \dfrac{6}{e^3}\right)$ es un máximo relativo de $f(x)$.

▪ Los puntos de inflexión están entre las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2-4x-1=0 \;\Rightarrow\; x = \frac{4\pm\sqrt{16+4}}{2} = \frac{4\pm 2\sqrt5}{2} = \begin{cases} 2-\sqrt5 \simeq -0{,}236 \\ 2+\sqrt5 \simeq 4{,}236 \end{cases}$$

Se tiene:

f'' > 0	f'' < 0	f'' > 0
	$2-\sqrt5$	$2+\sqrt5$

Como en $x = 2-\sqrt5$ y en $x = 2+\sqrt5$ la curva cambia su curvatura, son dos puntos de inflexión de la función.

b) $t = \cos x \;\Rightarrow\; dt = -\operatorname{sen}x\, dx \;\Rightarrow\; dx = -\dfrac{dt}{\operatorname{sen}x}$

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}x} dx = -\int \frac{t^2}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{dt}{\operatorname{sen}x} = -\int \frac{t^2}{1-\cos^2 x} dt = -\int \frac{t^2}{1-t^2} dt = \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = (1)$$

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t^2-1 \\ \cline{2-2} -t^2+1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \frac{t^2}{t^2-1} = 1 + \frac{1}{t^2-1}$$

$$(1) = \int dt + \int \frac{1}{t^2-1} dt = t + \int \frac{1}{t^2-1} dt = (2)$$

$$\boxed{\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{At-A+Bt+B}{(t+1)(t-1)} = \frac{(A+B)t-A+B}{t^2-1} \;\Rightarrow\; \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \;\Rightarrow\; B = \frac12,\; A = -\frac12}$$

$$(2)=t-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-1}dt=t-\frac{1}{2}\ln(t+1)+\frac{1}{2}\ln(t-1)+C=t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}+C=t+\ln\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}+C=$$

$$=\cos x+\ln\sqrt{\frac{\cos x-1}{\cos x+1}}+C$$

c) 1) $f(x)=ax^3+bx^2 \;\Rightarrow\; f'(x)=3ax^2+2bx$

$$(1,2)\text{ extremo relativo de } f(x) \Rightarrow \left|\begin{array}{lll} f(1)=2 & \Rightarrow & a+b=2 \\ f'(1)=0 & \Rightarrow & 3a+2b=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} -2a-2b=-4 \\ 3a+2b=0 \end{array} \Rightarrow a=-4\ ,\ b=6$$

2) Puntos de corte de la función con OX: $2x^3-3x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2(2x-3)=0 \;\Rightarrow\; x=0\ ,\ x=\frac{3}{2}$

Por tanto:

$$A=\left|\int_0^{3/2}\left(2x^3-3x^2\right)dx\right|=\left|\left[\frac{2x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}\right]_0^{3/2}\right|=\left|\left[\frac{x^4}{2}-x^3\right]_0^{3/2}\right|=\left|\frac{81}{32}-\frac{27}{8}-0\right|=\left|-\frac{27}{32}\right|=\frac{27}{32}\ u^2\simeq 0{,}84\ u^2$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde x, y y z son números reales.

Determine x , y y z para que el vector $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $\mathbf{M\,A}=\mathbf{B}$.

b) *(1,5 puntos)* Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$\mathbf{N}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix},\qquad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde a, b y c son números reales que verifican que $a\neq 0,\ a+b=0,\ c=a$.
Determine si el sistema $\mathbf{N\,X}=\mathbf{B}$ es compatible determinado.

SOLUCIÓN

a) $$MA=B \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y+2z+3x=0 \\ z+2x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+y+2z=0 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$$

Utilizamos la regla de Cramer para resolver el sistema:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1+4-3-6}{1+27+8-6-6-6}=\frac{-4}{18}=-\frac{2}{9}\qquad;\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{18}=\frac{9+4-3-2}{18}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\3&1&0\\2&3&1\end{vmatrix}}{18}=\frac{1+9-2-6}{18}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$$

Por tanto: $x=-\frac{2}{9}$, $y=\frac{4}{9}$, $z=\frac{1}{9}$

b) $a+b=0 \Rightarrow b=-a$; $c=a \Rightarrow$ la matriz de los coeficientes es: $\begin{pmatrix}a&-a&a\\-a&a&a\\a&a&-a\end{pmatrix}$. Veamos cuál es su rango:

$\begin{vmatrix}a&-a&a\\-a&a&a\\a&a&-a\end{vmatrix}=-a^3-a^3-a^3-a^3-a^3+a^3=-4a^3\neq 0$ pues $a\neq 0 \Rightarrow rg=3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta paralela a la recta:

$$r:\begin{cases}5x-3y+2z=1\\x+3y-2z=-4\end{cases}$$

que pasa por el punto $(0,2,-4)$.

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P=(1,1,0)$ a la recta r anterior.

SOLUCIÓN

a) La recta r está dada como intersección de dos planos. El vector $\vec{n}=(5,-3,2)$ es normal al primer plano y el vector $\vec{n}'=(1,3,-2)$ es normal al segundo.

El vector $\vec{u}=\vec{n}\times\vec{n}'=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&-3&2\\1&3&-2\end{vmatrix}=6\vec{i}+2\vec{j}+15\vec{k}+3\vec{k}+10\vec{j}-6\vec{i}=0\vec{i}+12\vec{j}+18\vec{k}=(0,12,18)\parallel(0,2,3)$ es un vector direccional de r y, por tanto, de cualquier recta paralela a r.

La ecuación de la recta buscada es: $\frac{x}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=0\\3y-6=2z+8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\3y-2z=14\end{cases}$

b) ▪ Obtengamos la ecuación del plano π perpendicular a r que pasa por P:

El vector $(0,2,3)$ direccional de r es normal a π luego la ecuación del plano es: $\pi:\ 2y+3z+D=0$ y como contiene a P: $2+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow \pi:\ 2y+3z-2=0$

▪ Calculemos las coordenadas del punto Q de intersección de π y r:

Sumando las dos primeras ecuaciones: $6x=-3 \Rightarrow x=-1/2$

$$\begin{cases}5x-3y+2z=1\\x+3y-2z=-4\\2y+3z=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3y-2z=-7/2\\2y+3z=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}9y-6z=-21/2\\4y+6z=4\end{cases} \Rightarrow 13y=-13/2 \Rightarrow y=-1/2 \Rightarrow 3z=3 \Rightarrow z=1$$

Luego $Q\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$

▪ $d(P,r)=d(P,Q)=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+(0-1)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+1}=\sqrt{\frac{22}{4}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$ u.

3. *(5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule

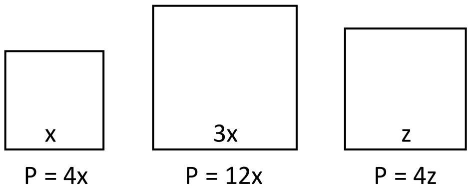
$$\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}}\,dx$$

c) *(1,5 puntos)* Calcule:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$$

SOLUCIÓN

a)



Tenemos:

$$4x + 12x + 4z = 1248 \;\Rightarrow\; z = \frac{1248 - 16x}{4} = 312 - 4x$$

La función que debe ser mínima es:

$$f(x) = x^2 + (3x)^2 + (312 - 4x)^2 = x^2 + 9x^2 + 97344 + 16x^2 - 2496x = 26x^2 - 2496x + 97344$$

$f'(x) = 52x - 2496 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{2496}{52} = 48$ y como $f''(x) = 52 > 0 \;\Rightarrow$ para $x = 48$ la suma de las áreas es mínima.

Por lo tanto, el lado del primer cuadrado debe ser de 48 metros, el del segundo 144 metros y el del tercero 120 m.

b) $t = e^x \;\Rightarrow\; dt = e^x\,dx \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t}$

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}}\,dx = 2\int \frac{e^{2x}}{e^x - \frac{2}{e^x}}\,dx = 2\int \frac{t^2}{t - \frac{2}{t}}\cdot\frac{dt}{t} = 2\int \frac{t^2}{t^2 - 2}\,dt = (1)$$

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t^2 - 2 \\ \cline{2-2} -t^2 + 2 & 1 \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \frac{t^2}{t^2 - 2} = 1 + \frac{2}{t^2 - 2}$$

$$(1) = 2\left[\int dt + 2\int \frac{1}{t^2 - 2}\,dt\right] = 2t + 4\int \frac{1}{t^2 - 2}\,dt = (2)$$

$$\frac{1}{t^2 - 2} = \frac{A}{t + \sqrt{2}} + \frac{B}{t - \sqrt{2}} = \frac{At - \sqrt{2}A + Bt + \sqrt{2}B}{\left(t + \sqrt{2}\right)\left(t - \sqrt{2}\right)} = \frac{(A + B)t + \sqrt{2}(B - A)}{t^2 - 2} \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} A + B = 0 \\ \sqrt{2}(B - A) = 1 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} B = -A \\ B = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\;,\; A = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

$$(2) = 2t + 4\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dt}{t + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dt}{t - \sqrt{2}}\right] = 2t - \sqrt{2}\ln\left(t + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\ln\left(t - \sqrt{2}\right) + C = 2t + \sqrt{2}\ln\frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} + C =$$

$$= 2e^x + \sqrt{2}\ln\frac{e^x - \sqrt{2}}{e^x + \sqrt{2}} + C$$

c) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \frac{0}{0} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{1 - x}{x\ln x + x - 1} = \frac{0}{0} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x + 1 + 1} = -\frac{1}{2}$$