Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera. Determine para qué valores de λ el sistema de ecuaciones que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} 2\lambda x - 2y - \lambda z = 2 \\ \lambda x - y + z = 5 \\ 3\lambda x + 4y + (\lambda - 1)z = \lambda - 5 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la inversa de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & -2 & -\lambda & 2 \\ \lambda & -1 & 1 & 5 \\ 3\lambda & 4 & \lambda-1 & \lambda-5 \end{array}\right)$$

Veamos para qué valores del parámetro el rango es el máximo:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & -2 & -\lambda \\ \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda - 4\lambda^2 - 6\lambda - 3\lambda^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda - 8\lambda = -7\lambda^2 - 14\lambda = 0 \;\Rightarrow\; -7\lambda\left(\lambda+2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

▪ Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -2$: $\text{rg A} = \text{rg B} = 3 = \text{nº de incógnitas} \;\Rightarrow$ sistema compatible determinado.

▪ Para $\lambda = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \end{array}\right)$.

Como el menor $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg A} = 2$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 10 + 2 - 8 - 10 = -6 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg B} = 3$

Puesto que $\text{rg A} \neq \text{rg B} \;\Rightarrow$ el sistema es incompatible.

▪ Para $\lambda = -2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ -6 & 4 & -3 & -7 \end{array}\right)$.

Como el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg A} = 2$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 14 + 6 + 40 - 8 - 14 - 30 = 35 \neq 0$

$\Rightarrow \text{rg B} = 3$. Puesto que $\text{rg A} \neq \text{rg B} \;\Rightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Como $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6-3 = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$. Calculemos entonces M^{-1}:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjunta}(*)} (\text{Adj}\,M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} (\text{Adj}\,M)^t = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}}$$

$$\longrightarrow M^{-1} = \frac{(\text{Adj}\,M)^t}{|M|} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$, $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$, $M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$, $M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$, $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Comprobemos que, en efecto, M^{-1} es la matriz inversa de M:

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que satisfacen que $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ y $u \,.\, v = 10$. Determine $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) *(1 punto)* Considere las rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + by = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

1) *(0,5 puntos)* Determine los valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que las rectas sean paralelas.

2) *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que las rectas sean coincidentes?

SOLUCIÓN.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{10}{5 \cdot 2} = 1 \Rightarrow \alpha = 0^o \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

b) 1) Obtengamos un vector direccional de cada recta. Para ello, obtengamos dos puntos de cada una de ellas:

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = ax \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Para } x = 0 :\ y = 0 , z = 0 \Rightarrow O(0,0,0) \\ \text{Para } x = 1 :\ y = 2 , z = a \Rightarrow B(1,2,a) \end{array} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{OB} = (1,2,a)$$

$$s : \begin{cases} x + by = 3 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - by \\ z = 3 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Para } y = 0 :\ x = 3 , z = 3 \Rightarrow P(3,0,3) \\ \text{Para } y = 1 :\ x = 3 - b , z = 2 \Rightarrow Q(3-b,1,2) \end{array} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-b,1,-1)$$

$$r \parallel s \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{-b} = \frac{2}{1} = \frac{a}{-1} \Rightarrow a = -2 \ ,\ b = -\frac{1}{2}$$

2) No. Para que así fuera, todos sus puntos deberían ser comunes y, por ejemplo, el punto $O(0,0,0)$ que pertenece a r es evidente que no pertenece a s pues no verifica su ecuación.

3. *(5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$$

b) *(1,5 puntos)* Determine el límite siguiente:

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{1-sen(x)}\right)^{\frac{cos(x)}{sen(x)}}$$

c) *(1,5 puntos)* Determine la ecuación de la curva $f(x)$ sabiendo que la recta tangente en $x = 3$ es $y = 9x - 13$ y la derivada segunda verifica que $f''(x) = 4$, para cualquier valor de x.

SOLUCIÓN.

a) $e^x = t \;\Rightarrow\; e^x\,dx = dt \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

Se tiene: $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \int \frac{t^3}{t^2+3t+2}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t^3}{t^3+3t^2+2t}\,dt =$

$$\begin{array}{l|l} t^3 & t^3+3t^2+2t \\ \hline -t^3-3t^2-2t & 1 \\ \hline -3t^2-2t & \end{array}$$

$$= \int\left(1-\frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t}\right)dt = t - \int \frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t}\,dt = (1)$$

Resolvamos la última integral:

$$t^3+3t^2+2t = t\left(t^2+3t+2\right) = t(t+1)(t+2) \quad / \quad t^2+3t+2=0 \;\Rightarrow\; t=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}= \begin{cases} t=-1 \\ t=-2 \end{cases}$$

$$\frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t+2} = \frac{A(t+1)(t+2)+Bt(t+2)+Ct(t+1)}{t(t+1)(t+2)} = \frac{At^2+2At+At+2A+Bt^2+2Bt+Ct^2+Ct}{t^3+3t^2+2t} =$$

$$= \frac{(A+B+C)t^2+(3A+2B+C)t+2A}{t^3+3t^2+2t} \Rightarrow \begin{array}{c} A+B+C=3 \\ 3A+2B+C=2 \\ 2A=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A=0 \\ -B-C=-3 \\ 2B+C=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A=0 \\ B=-1 \\ C=4 \end{array} \Rightarrow \frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t} = \frac{-1}{t+1}+\frac{4}{t+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t}\,dt = -\int\frac{dt}{t+1}+4\int\frac{dt}{t+2} = -\ln|t+1|+4\ln|t+2| = \ln\left|\frac{(t+2)^4}{t+1}\right|$$

Por tanto: $(1) = t - \ln\left|\frac{(t+2)^4}{t+1}\right| = e^x - \ln\left(\frac{\left(e^x+2\right)^4}{e^x+1}\right) + C$

b) $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}} = \left(\frac{1}{1-1}\right)^{\frac{0}{1}} = \infty^0$ que es una indeterminación.

Apliquemos logaritmos neperianos: $\ln L = \ln\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\ln\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}\right] =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\cdot\ln\left(\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\right)\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\cdot\left(\ln 1-\ln(1-\operatorname{sen}x)\right)\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-\cos x\cdot\ln(1-\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-\ln(1-\operatorname{sen}x)}{\operatorname{tag}x}\right] = \frac{\infty}{\infty} =$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital: $= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{1-\operatorname{sen}x} = \frac{0}{0} =$

Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital: $\quad = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{3\cos^2 x\,(-\operatorname{sen}x)}{-\cos x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(3\cos x \cdot \operatorname{sen}x\right) = 0 \;\Rightarrow\; \ln L = 0 \;\Rightarrow\; L = 1$

c) $f''(x) = 4 \;\Rightarrow\; f'(x) = \int 4\,dx = 4x + C \;\Rightarrow\; f(x) = \int (4x + C)\,dx = 2x^2 + Cx + D$

La pendiente de la tangente $m = 9$ es igual a $f'(3)$: $\quad 12 + C = 9 \;\Rightarrow\; C = -3 \;\Rightarrow\; f(x) = 2x^2 - 3x + D$

El punto de tangencia es común a la curva y a la tangente:

$$x = 3\ ,\ y = 27 - 13 = 14 \;\Rightarrow\; (3\,,14) \in f(x) \;\Rightarrow\; f(3) = 18 - 9 + D = 14 \;\Rightarrow\; D = 5$$

La ecuación de la curva es entonces: $\quad f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea λ un parámetro real cualquiera y considere la matriz y vector siguientes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) *(1 punto)* ¿Para qué valores de λ existe la matriz inversa $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$, siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad de orden 3?

2) *(1 punto)* Si $\lambda = 0$, encuentre los valores de x, y, y z que satisfacen la ecuación

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = 2\,\mathbf{X} + \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

b) *(1 punto)* Sean F_1, F_2 y F_3 la primera, segunda y tercera filas, respectivamente, de una matriz $\mathbf{M}$ de orden 3×3 cuyo determinante es -2.
Calcule el determinante de una matriz cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente: $5F_1 - F_3, 3F_3$ *y* F_2.

SOLUCIÓN.

a) 1) $\quad A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|\,A - 2I\,| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda - 2 - \lambda^2(-\lambda - 2) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -2\ ,\ \lambda = -1\ ,\ \lambda = 1$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \underline{|\,0} \end{array}$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \quad \begin{matrix} \lambda = -1 \\ \lambda = -2 \end{matrix}$$

Por tanto, $\exists (A - 2I)^{-1} \quad \forall \lambda \neq -2\,, -1\,, 1.$

2) $AX=2X+b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x \\ -5x-5z \\ 3z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+1 \\ 3y \\ 2z+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2x+1 \\ 5x+3y+5z=0 \\ 3z=2z+1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \; x=1 \; , \; z=1 \; , \; y=-\dfrac{10}{3}$

b) Se tiene: $\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix}=-2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}=2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}=30 \overset{(3)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 5F_1-F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}=30$

Propiedades aplicadas:
(1) Si se permutan dos líneas, el determinante cambia de signo. En nuestro caso, se permutan las filas segunda y tercera.
(2) Si los elementos de una línea se multiplican por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número. En nuestro caso, la primera fila se multiplica por 5 y la segunda por 3 por lo que el determinante queda multiplicado por 15..
(3) Si a una línea se le suma una combinación lineal de las paralelas, el determinante no varía. En nuestro caso, a la primera fila se le suma la segunda multiplicada por $-1/3$.

2. *(2 puntos)*

a) *(0,75 puntos)* Sea a un parámetro real cualquiera. Dados los planos:

$$\pi : 3x + ay + 2z - 10 = 0, \qquad y \qquad \pi' : x - y + az - 5 = 0$$

¿Existen valores de a para los que los planos sean paralelos?

b) *(1,25 puntos)* Encuentre la ecuación de la recta paralela a la recta intersección de los planos:

$$\pi : 3x + 2y + z = 10, \quad y \quad \pi' : 4x - 2y - 8z = 10$$

que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

SOLUCIÓN.

a) Los planos son paralelos si sus vectores normales tienen la misma dirección.

$\vec{n}=(3,a,2)$ es un vector normal al plano π y $\vec{n}'=(1,-1,a)$ lo es al plano π'.

$\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{n}' \Leftrightarrow \dfrac{3}{1}=\dfrac{a}{-1}=\dfrac{2}{a}$ y no existe ningún valor de a para el que se verifiquen las igualdades. Por tanto, los planos no son paralelos.

b) Obtengamos un vector direccional de la recta dada como intersección de planos. El vector $\vec{u}=\vec{n}\times\vec{n}'$ producto vectorial de los vectores normales a π y π' tiene la dirección de la recta intersección y de cualquier paralela a ella:

$\vec{n}=(3,2,1) \; , \; \vec{n}'=(4,-2,-8)$

$$\vec{u}=\vec{n}\times\vec{n}'=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \end{vmatrix}=-16\,\vec{i}+4\,\vec{j}-6\vec{k}-8\vec{k}+24\,\vec{j}+2\,\vec{i}=-14\,\vec{i}+28\,\vec{j}-14\vec{k}=(-14,28,-14) \parallel (-1,2,-1)$$

La ecuación (en forma continua) de la recta buscada es entonces: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$

3. *(5 puntos)*

a) *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = x^2 e^{1/x^2}$$

1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de $f(x)$.

2) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

b) *(2 puntos)* Calcule:

$$\int \left(\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(x)}{x^2} \right) dx$$

SOLUCIÓN.

a) 1) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{ 0 \}$. Se trata de una función par, simétrica respecto al eje OY.

2) ▪ Asíntota vertical: $x = 0$

pues $\displaystyle \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^2 \cdot e^{1/x^2}\right) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} =$ (regla de L'Hôpital) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} e^{1/x^2} = \infty$

▪ Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$\displaystyle m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot e^{1/x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot e^{1/x^2}\right) = \infty \;\Rightarrow$ no tiene asíntotas horizontales.

3) $\displaystyle f'(x) = 2x\cdot e^{1/x^2} + x^2\cdot e^{1/x^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right) = 2\,e^{1/x^2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0 \;\Rightarrow\; x - \frac{1}{x} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1\ ,\ x = 1$

$$f''(x) = 2\left[e^{1/x^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right) + e^{1/x^2}\cdot\frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2}\right] = 2e^{1/x^2}\cdot\frac{-2 + x^3 + x}{x^3}$$

$\displaystyle f''(-1) = 2e\cdot\frac{-2-1-1}{-1} = 8e > 0 \;\Rightarrow\; x = -1$ mínimo relativo: $(-1\,,e)$

Por la simetría respecto a OY, en $x = 1$ la función tiene también un mínimo relativo: $(1\,,e)$

b) $\displaystyle I = \int\left(\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x^2}\right)dx = \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = I_1 + I_2 = (1)$

$\displaystyle I_1 = \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \left| x = t^2 \;\Rightarrow\; dx = 2t\,dt \right| = \int \frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int\left(t^4 - 2t^2 + 1\right)dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + 2t + C_1 =$

$\displaystyle = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C_1$

$\displaystyle I_2 = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{dx}{x^2} \;\Rightarrow\; v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_2$

Por tanto: $\displaystyle I = I_1 + I_2 = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$