Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Sean A y B matrices 2 x 2. Determine dichas matrices sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones:

$$A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$
$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Sean C y D las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine el determinante: $|5(CD)^{-1}|$, donde $(C\,D)^{-1}$ es la matriz inversa de $(C\,D)$.

SOLUCIÓN.

a) Multiplicamos por 3 la segunda ecuación: $6A - 3B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

Sumamos ahora ambas ecuaciones: $7A = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Para calcular B, sustituimos A en la segunda ecuación y despejamos B:

$$B = 2A - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $C\,D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Calculemos la inversa de $C\,D$: $|C\,D| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

$$C\,D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjunta}} \text{Adj}(CD) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} (\text{Adj}(CD))^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}} (CD)^{-1} = \frac{(\text{Adj}(CD))^t}{|CD|} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $5(CD)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 15/2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |5(CD)^{-1}| = \begin{vmatrix} -5 & 15/2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 25 - \frac{75}{2} = -\frac{25}{2}$

2. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine el valor o valores de m, si existen, para que la recta

$$r : \begin{cases} mx + y = 2 \\ x + mz = 3 \end{cases}$$

sea paralela al plano:

$$\pi : 2x - y - z + 6 = 0$$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P = (2, 1, 1)$ a la recta r cuando $m = 2$.

SOLUCIÓN.

a) La recta será paralela al plano cuando un vector direccional de la recta sea perpendicular a un vector normal al plano.

Para obtener un vector direccional de la recta, obtengamos dos puntos de la misma:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Para } z=0: \quad x=3 \;,\; y=2-3m \;\Rightarrow\; A\left(3\,,2-3m\,,0\right) \\ \text{Para } z=1: \quad x=3-m \;,\; y=2-3m+m^2 \;\Rightarrow\; B\left(3-m\,,2-3m+m^2\,,1\right) \end{array} \right| \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AB}=\left(-m\,,m^2\,,1\right)$$

Un vector normal al plano es $\vec{n}=\left(2\,,-1\,,-1\right)$

$$r \parallel \pi \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AB}\perp\vec{n} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0 \;\Rightarrow\; -2m-m^2-1=0 \;\Rightarrow\; m=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{-2}=-1$$

b) Para $m=2$, la recta r es $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=2 \\ x+2z=3 \end{array}\right.$ y un vector direccional de la misma es $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\left(-2\,,4\,,1\right)$.

Hallamos el plano π' perpendicular a r que pasa por P. Su vector normal es el direccional de la recta luego su ecuación es $-2x+4y+z+D=0$ y como contiene al punto P: $-4+4+1+D=0 \;\Rightarrow\; D=-1 \;\Rightarrow\; \pi'\equiv -2x+4y+z-1=0$.

El punto Q de intersección de la recta r y el plano π' (proyección de P sobre r):

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y=2 \\ x+2z=3 \\ -2x+4y+z=1 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; -2\left(3-2z\right)+4\left[2-2\left(3-2z\right)\right]+z=1 \;\Rightarrow\; -6+4z+8-24+16z+z=1 \;\Rightarrow\; 21z=23 \;\Rightarrow\; z=\frac{23}{21} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x=3-2z=3-\frac{46}{21}=\frac{17}{21} \;,\; y=2-2x=2-\frac{34}{21}=\frac{8}{21} \;\Rightarrow\; Q\left(\frac{17}{21},\frac{8}{21},\frac{23}{21}\right)$$

La distancia entre el punto y la recta es la distancia entre los puntos P y Q:

$$d\left(P\,,r\right)=d\left(P\,,Q\right)=\sqrt{\left(2-\frac{17}{21}\right)^2+\left(1-\frac{8}{21}\right)^2+\left(1-\frac{23}{21}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{25}{21}\right)^2+\left(\frac{13}{21}\right)^2+\left(\frac{-2}{21}\right)^2}=\sqrt{\frac{798}{441}}=\sqrt{\frac{38}{21}}$$

– **Otra forma** –

Un punto de la recta es $A\left(3\,,-4\,,0\right)$ y su vector direccional $\vec{u}=\left(-2\,,4\,,1\right)$. Además, el vector $\overrightarrow{AP}=\left(-1\,,5\,,1\right)$.

Se tiene: $$d\left(P\,,r\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{array}\right|}{\sqrt{4+16+1}}=\frac{\left|5\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}+10\vec{k}+\vec{j}-4\vec{i}\right|}{\sqrt{21}}=\frac{\left|\left(1\,,-1\,,6\right)\right|}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{1+1+36}}{\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{38}{21}}$$

3. *(2,5 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{2x-6}$$

a) *(1,25 puntos)* Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de esa función.

b) *(1,25 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de esa función.

SOLUCIÓN.

a) • Por tratarse de una función racional: $\mathrm{Dom}\left(f\right)=\mathbb{R}-\left\{3\right\}$

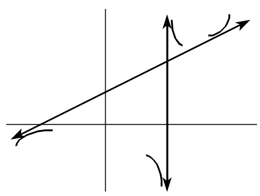
• Asíntotas verticales: $x=3$ pues $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2}{2x-6}=\infty$. Además: $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2}{2x-6}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2}{2x-6}=+\infty$

• Asíntota oblicua: $f\left(x\right)=\frac{x^2}{2x-6}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{9}{2x-6} \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ es una asíntota oblicua de la función.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2x-6 \\ \hline -x^2+3x & \frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ \hline 3x & \\ -3x+9 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

Además, la posición de la gráfica respecto a la asíntota:

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9}{2x-6}=0^- \quad y \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9}{2x-6}=0^+$$



b) $f'(x)=\dfrac{2x(2x-6)-2x^2}{(2x-6)^2}=\dfrac{2x(2x-6-x)}{(2x-6)^2}=\dfrac{2x(x-6)}{(2x-6)^2}=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$

Se tiene:

f ' > 0	f ' < 0	f ' < 0	f ' > 0
	0	3	6

Luego la función es creciente en $(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$ y decreciente en $(0,6)-\{3\}$

• La función sólo es discontinua en $x=3$. En $x=0$ la función tiene un máximo relativo puesto que pasa de creciente a decreciente y en $x=6$ tiene un mínimo relativo puesto que pasa de decreciente a creciente.

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* La derivada de una función $f(x)$ es:

$$(x-1)^3(x-3)$$

Determine la función $f(x)$ sabiendo que $f(0)=1$.

b) *(1,25 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}$$

SOLUCIÓN.

a) $f(x)=\int (x-1)^3(x-3)\,dx = \left| x-1=t \;\Rightarrow\; x-3=t-2\;,\; dx=dt \right| = \int t^3(t-2)\,dt=\int\left(t^4-2t^3\right)dt=\dfrac{t^5}{5}-2\dfrac{t^4}{4}+C=$

$=\dfrac{1}{5}(x-1)^5-\dfrac{1}{2}(x-1)^4+C$ y como $f(0)=1$: $-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2}+C=1 \;\Rightarrow\; C=1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{10}$

Por tanto: $f(x)=\dfrac{1}{5}(x-1)^5-\dfrac{1}{2}(x-1)^4+\dfrac{17}{10}$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}=1^\infty=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x+1}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+1}{2x+1}}\right)^{\left(3x^2+x+1\right)\frac{x^3+1}{2x+1}\cdot\frac{2x+1}{x^3+1}}=$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 \quad +2x+2 & x^3+1 \\ \cline{2-2} -x^3 \quad\quad -1 & 1 \\ \cline{1-1} 2x+1 & \end{array}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+1}{2x+1}}\right)^{\frac{x^3+1}{2x+1}}\right]^{\frac{6x^3+5x^2+3x+1}{x^3+1}}=e^6$$

– Otra forma –

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}-1\right)\cdot\left(3x^2+x+1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2-x^3-1}{x^3+1}\right)\cdot\left(3x^2+x+1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x^3+1}\right)\cdot\left(3x^2+x+1\right)}==e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^3+5x^2+3x+1}{x^3+1}\right)}=e^6$$

OPCIÓN B

1. *(2,5 puntos)* Determine para qué valores de a el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{aligned} a\,x - 3\,y + 6\,z &= 3 \\ a\,x + 3\,y + a\,z &= 6 \\ -a\,x - 6\,y + 9\,z &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & -3 & 6 & 3 \\ a & 3 & a & 6 \\ -a & -6 & 9 & 0 \end{array}\right)$

El sistema es compatible determinado cuando $\text{rg}\,A = \text{rg}\,B = 3$, es compatible indeterminado cuando $\text{rg}\,A = \text{rg}\,B < 3$ y es incompatible cuando $\text{rg}\,A \neq \text{rg}\,B$.

Estudiemos el rango de las matrices según los posibles valores del parámetro a:

$$\begin{vmatrix} a & -3 & 6 \\ a & 3 & a \\ -a & -6 & 9 \end{vmatrix} = 27a - 36a + 3a^2 + 18a + 27a + 6a^2 = 9a^2 + 36a = 0 \quad\Rightarrow\quad 9a\left(a+4\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad a = 0\ ,\ a = -4$$

- Si $a \neq -4$ y $a \neq 0$: $\text{rg}\,A = \text{rg}\,B = 3 \quad\Rightarrow\quad$ el sistema es compatible determinado.
- Si $a = -4$ las matrices A y B son ahora: $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -3 & 6 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & 6 \\ 4 & -6 & 9 & 0 \end{array}\right)$

  El menor $\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 12 = -24 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{rg}\,A = 2$

  Orlamos el menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -4 & 3 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 72 - 72 - 36 - 0 - 144 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{rg}\,B = 3$

  Luego para $a = -4$ el sistema es incompatible.
- Si $a = 0$ las matrices de los coeficientes y ampliada son ahora: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 9 & 0 \end{array}\right)$

  El menor de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{rg}\,A = 2$

  Orlamos el menor con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ -6 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 81 - 216 + 162 = 27 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{rg}\,B = 3$

  Luego para $a = 0$ el sistema es también incompatible.
- El sistema no es compatible indeterminado para ningún valor del parámetro.

2. *(2,5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi : x - y - z = 0$$

$$\pi' : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $P = (1, 0, 1)$. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

SOLUCIÓN.

a) Los planos pueden ser secantes, paralelos o coincidentes.

$\vec{n} = (1, -1, -1)$ es un vector normal al plano π. $A(3, 1, 0)$ es un punto y $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ dos vectores de π'. Puesto que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 - 1 + 0 = 1 \neq 0$ descartamos la posibilidad de que coincidan o sean paralelos. Los planos se cortan.

b) El vector $\vec{n} = (1, -1, -1)$ perpendicular al plano π es un vector direccional de cualquier recta perpendicular al plano. Como la recta que buscamos debe pasar por el punto $P(1, 0, 1)$, la ecuación (en forma continua) es:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Y como intersección de planos:} \quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} \\ \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

3. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ 2x + a & si \quad 2 \le x \le 4 \\ -x^2 + 3x + b & si \quad x > 4 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b para que la función sea continua.

b) *(1,25 puntos)* Supongamos ahora que $a = 0$. Usando la definición de derivada, estudie la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 2$.

SOLUCIÓN.

a) Puesto que los tres trozos en que está definida la función corresponden a funciones continuas (polinómicas), debemos exigir que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ y en $x = 4$.

Debe ser:

$$\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2} (x^2) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + a) \Leftrightarrow 4 = 4 + a \Rightarrow a = 0 \\ \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 4} (2x + 0) = \lim\limits_{x \to 4} (-x^2 + 3x + b) \Leftrightarrow 8 = -16 + 12 + b \Rightarrow b = 12 \end{array} \right.$$

b) La función es derivable en $x = 2$ si $f'(2^-) = f'(2^+)$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{4h + h^2}{h} = 4 \\ f'(2^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{2(2+h) - 4}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{4 + 2h - 4}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{2h}{h} = 2 \end{array} \right| \Rightarrow \text{No es derivable.}$$

4. *(2,5 puntos)*

a) *(1,25 puntos)* Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$, determine el área encerrada entre ambas funciones.

b) *(1,25 puntos)* Calcule la integral:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}\,dx$$

SOLUCIÓN.

a) Definimos la función diferencia de ambas funciones: $d(x) = x^2 + x^2 - 2 = 2x^2 - 2$

Los puntos de corte de esta función con OX son: $2x^2 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = -1\;,\; x = 1$

Tenemos: $A = \left| \int_{-1}^{1} \left(2x^2 - 2\right) dx \right| = \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 2x \right]_{-1}^{1} \right| = \left| \left(\frac{2}{3} - 2\right) - \left(-\frac{2}{3} + 2\right) \right| = \left| \frac{2}{3} - 2 + \frac{2}{3} - 2 \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3}\ u^2$

b) Calculemos una primitiva de la función:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + 2x^2 - x & x + 2 \\ \cline{1-1} \quad 2x^2 - x & \\ \quad -2x^2 + 4x - 2 & \\ \cline{1-1} \qquad 3x - 2 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}\,dx = \int \left(x + 2 + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \int \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}\,dx$$

Calculemos la nueva integral:

$$\frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} = \frac{Ax - A + B}{(x - 1)^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ -A + B = -2 \;\Rightarrow\; B = 1 \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}\,dx = \int \frac{3}{x - 1}\,dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2}\,dx = 3\ln(x - 1) - \frac{1}{x - 1}$$

Así pues la integral inicial es $\int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\ln(x - 1) - \frac{1}{x - 1}$ y tenemos:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln(x - 1) - \frac{1}{x - 1} \right]_2^3 = \left(\frac{9}{2} + 6 + 3\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - (2 + 4 + 0 - 1) = 5 + \ln 8$$