Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A.1. Sea A la matriz: $A=\begin{pmatrix}5 & -m & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$

a) *(1,5 puntos)* Discuta el sistema que aparece a continuación, para cada uno de los valores de m y resuélvalo para los valores de m siguientes: $m=-1$ y $m=2$.

$$A\,X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{donde} \quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

b) *(1 punto)* Determine la inversa de la matriz A cuando $m=0$.

SOLUCIÓN.

a) Se trata de un sistema homogéneo. Su discusión (compatible determinado o compatible indeterminado) depende del rango de la matriz de los coeficientes A.

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & -m & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=-5m+3+3+m^2=m^2-5m+6=0 \;\Rightarrow\; m=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}= \begin{cases} m=2\\ m=3\end{cases}$$

Se tiene: • $\boxed{\text{Si } m\neq 2 \text{ y } m\neq 3:\quad \text{rg}A=3}$ $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (una única solución: $x=y=z=0$)

• Si $\boxed{m=2 \text{ o } m=3:\quad \text{rg}A=2}$ pues el menor $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$ $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado

• Para $m=-1$: el sistema tiene como única solución la trivial $\boxed{x=y=z=0}$

• Para $m=2$: el sistema es compatible indeterminado. El sistema dado es equivalente a:

$$\begin{cases}x-y=0\\ x+y+2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\ x+y=-2\lambda\end{cases} \Rightarrow\; 2x=-2\lambda \;\Rightarrow\; x=-\lambda \;;\; y=x=-\lambda \text{ luego las soluciones son:}$$

$$\boxed{x=y=-\lambda\;,\; z=\lambda}$$

b) Para $m=0$: $|A|=6$.

Tenemos: $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow A^t=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \text{adj}\left(A^t\right)=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -3 & 3\\ 2 & -5 & -5\end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & -1/2 & 1/2\\ 1/3 & -5/6 & -5/6\end{pmatrix}}$

A.2. a) *(1 punto)* ¿Pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$? **Justifique la respuesta**.

b) *(1,5 puntos)* Determine todos los posibles vectores $\vec{u}=(a,0,b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta $r:\begin{cases}x+y+z=0\\ x-y+z-2=0\end{cases}$

SOLUCIÓN.

a) No, pues: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})=2\cdot3\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})=8 \;\Rightarrow\; \cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{8}{6}$ que es imposible.

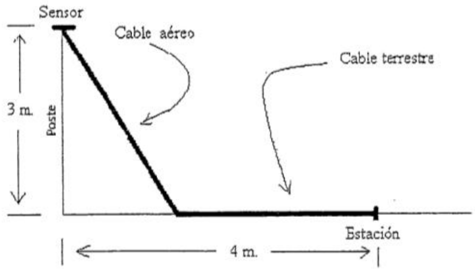
b) Obtengamos un vector direccional de r. Dos puntos de la recta son: $\begin{cases}x+y+z=0\\ x-y+z-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=-z\\ x-y=-z+2\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow\; 2x=-2z+2 \;\Rightarrow\; x=-z+1\;,\; y=-1 \;\Rightarrow\; A(0,-1,1)\;,\; B(1,-1,0)$ y un vector direccional: $\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$.

Se tiene: $\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2} = 8 \;\Rightarrow\; a^2+b^2 = 64 \\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \;\Rightarrow\; a-b=0 \end{array}\right| \;\Rightarrow\; a=b \;\Rightarrow\; 2a^2 = 64 \;\Rightarrow\; a^2 = 32 \;\Rightarrow\; a=b=\pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$

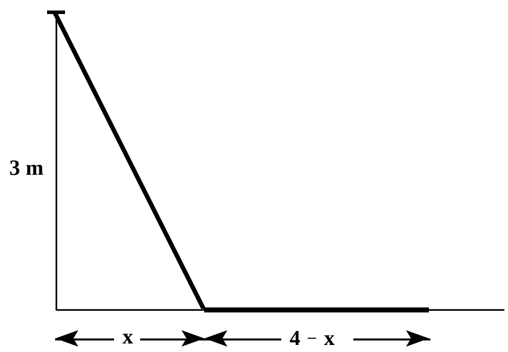
Es decir: $\boxed{\vec{u} = \left(4\sqrt{2}\,,0\,,4\sqrt{2}\right)}$ y $\boxed{\vec{u} = \left(-4\sqrt{2}\,,0\,,-4\sqrt{2}\right)}$

A.3. *(2,5 puntos)* Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge datos meteorológicos. Dichos datos deben transmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo (véase figura).
El coste del cable es distinto según sea aéreo o terrestre. El metro de cable aéreo cuesta 3000 euros y el metro de cable terrestre cuesta 1000 euros. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?



SOLUCIÓN.

Sea x la distancia del poste al punto en que el cable aéreo llega a tierra (ver dibujo). La longitud del cable aéreo es:



$$L = \sqrt{3^2+x^2} = \sqrt{9+x^2}$$

El coste del cable es: $C = 3000\sqrt{9+x^2} + 1000\,(4-x)$ que debe ser mínimo:

$$C' = 3000\,\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} - 1000 = \frac{3000\,x}{\sqrt{9+x^2}} - 1000 = 0 \;\Rightarrow$$

$$3000\,x = 1000\sqrt{9+x^2} = 0 \;\Rightarrow\; 9x^2 = 9+x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \simeq 1{,}06$$

Veamos que este valor crítico hace mínimo el coste:

$$C'' = \frac{3000\,\sqrt{9+x^2} - 3000x\cdot\dfrac{2x}{2\,\sqrt{9+x^2}}}{9+x^2} = \frac{3000\left(9+x^2\right) - 3000x^2}{\left(9+x^2\right)\sqrt{9+x^2}} =$$

$$= \frac{27000}{\left(9+x^2\right)\sqrt{9+x^2}} > 0 \;\Rightarrow$$ la función coste es mínima.

Por lo tanto, la longitud del cable aéreo debe ser: $L = \sqrt{9+\frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \simeq \boxed{3{,}18 \text{ m}.}$ El cable aéreo debe llegar a tierra a 1,06 metros del poste. El cable terrestre debe medir $\boxed{2{,}94 \text{ metros.}}$

A.4. a) *(1,25 puntos)* Determine la función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x) = 2xe^{5x}$ y que verifica que $f(0) = 2$.

b) *(1,25 puntos)* Calcule: $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

SOLUCIÓN.

a) La función $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$:

$$f(x) = \int 2xe^{5x}\,dx = \left|\begin{array}{l} u = 2x \;\Rightarrow\; du = 2dx \\ dv = e^{5x}\,dx \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{5}\,e^{5x} \end{array}\right| = \frac{2}{5}\,x\,e^{5x} - \frac{2}{5}\int e^{5x}\,dx = \frac{2}{5}\,x\,e^{5x} - \frac{2}{25}e^{5x} + C = \frac{2}{5}e^{5x}\left(x-\frac{1}{5}\right) + C$$

Calculemos ahora la constante de integración con la condición $f(0)=2$:

$$f(0)=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+C=2 \;\Rightarrow\; C=2+\frac{2}{25}=\frac{52}{25} \;\Rightarrow\; \boxed{f(x)=\frac{2}{5}e^{5x}\left(x-\frac{1}{5}\right)+\frac{52}{25}}$$

b) $$\lim_{x\to2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{3-x}-1\right)\frac{1}{(2-x)^2}}=e^{\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1-3+x}{3-x}\right)\frac{1}{(2-x)^2}}=e^{\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{x-2}{3-x}\right)\frac{1}{(x-2)^2}}=e^{\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{(3-x)(x-2)}\right)}=e^{+\infty}=\boxed{+\infty}$$

También podríamos haber realizado el cambio de variable: $x-2=\frac{1}{t} \;\Rightarrow\; t=\frac{1}{x-2}$ y cuando $x\to2^+ \Rightarrow t\to+\infty$:

$$\lim_{x\to2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{3-2-\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{1}{t^2}\right)}}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{t}{t-1}-1\right)^{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{(t-1)}\right]^{\frac{t^2}{t-1}}=e^{+\infty}=\boxed{+\infty}$$

<u>OPCIÓN B</u>

B.1. a) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz A, que aparece a continuación, según los diferentes valores de a:

$$A=\begin{pmatrix} a & -a & 6\\ 2 & -2 & 4\\ a+2 & -5 & -10\end{pmatrix}$$

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existe, una matriz A, 2×2, que verifique la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3\\3&3\end{pmatrix}$$

¿Cuál es el rango de la matriz A?

SOLUCIÓN.

a) Estudiemos los valores de a para los que el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} a & -a & 6\\ 2 & -2 & 4\\ a+2 & -5 & -10\end{vmatrix}=20a-60-4a(a+2)+12(a+2)+20a-20a=-4a^2+24a-36=4\left(-a^2+6a-9\right)=0 \;\Rightarrow\; -a^2+6a-9=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{-2}=3$$

Tenemos entonces:

- $\boxed{\text{Para } a\neq3:\quad rg A=3}$
- $\boxed{\text{Para } a=3:\quad rg A=2}$ pues el menor $\begin{vmatrix}-2&4\\-5&-10\end{vmatrix}=20+20\neq0$

b) Sea $A=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$.

Se tiene: $$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3\\3&3\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}2x_{11}+x_{21}&2x_{12}+x_{22}\\x_{11}+x_{21}&x_{12}+x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3\\3&3\end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \begin{pmatrix}2x_{11}+x_{21}&-2x_{11}-x_{21}+2x_{12}+x_{22}\\x_{11}+x_{21}&-x_{11}-x_{21}+x_{12}+x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3\\3&3\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{r}2x_{11}+x_{21}=-3\\x_{11}+x_{21}=3\\-2x_{11}-x_{21}+2x_{12}+x_{22}=-3\\-x_{11}-x_{21}+x_{12}+x_{22}=3\end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{r}2x_{11}+x_{21}=-3\\x_{11}+x_{21}=3\\2x_{12}+x_{22}=-6\\x_{12}+x_{22}=6\end{array}\right. \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{11}=-6 \\ x_{21}=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{12}=-12 \\ x_{22}=18 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}}$$

$\operatorname{rg} A = 1$ porque $F2 = -1{,}5 \cdot F1$ (las dos filas son proporcionales)

- Otra forma: calculemos las matrices inversas de los dos factores:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{la traspuesta}]{\text{adjunta de}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{determinante}]{\text{Dividir por}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{la traspuesta}]{\text{adjunta de}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{determinante}]{\text{Dividir por}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y ahora: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}}$

B.2. Dadas las rectas: $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{1}$ y $s: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$

a) *(1,5 puntos)* Determine su posición relativa

b) *(1 punto)* Calcule la distancia del punto $P = (2, 3, 1)$ a la recta s.

SOLUCIÓN.

a) $\vec{u} = (2, 3, 1)$ es un vector direccional de r. $\vec{v} = (-1, 2, 2)$ lo es de s. Como las coordenadas no son proporcionales, las rectas se cortan o se cruzan

$A(0,0,0)$ es un punto de r**.** $B(0,1,-2)$ es un punto de s. $\overrightarrow{AB} = (0,1,-2)$ es un vector con origen en r y extremo en s.

Puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 1 - 6 - 4 = -19 \neq 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{r y s se cruzan}}$

b) • Calculemos la ecuación del plano π perpendicular a s que pasa por P:

El vector $\vec{v} = (-1, 2, 2)$ direccional de s, es normal al plano π: $\pi: -x + 2y + 2z + D = 0$.

Como $P \in \pi$: $-2 + 6 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -6 \Rightarrow \pi: -x + 2y + 2z - 6 = 0$

- Calculemos el punto de corte de π y s:

$$\lambda + 2(1+2\lambda) + 2(-2+2\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda + 2 + 4\lambda - 4 + 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 9\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{9} \Rightarrow Q\left(-\frac{8}{9}, \frac{25}{9}, -\frac{2}{9}\right)$$

- La distancia entre P y s es la distancia entre P y Q:

$$d(P,s) = d(P,Q) = \sqrt{\left(2+\frac{8}{9}\right)^2 + \left(3-\frac{25}{9}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{676}{81} + \frac{4}{81} + \frac{121}{81}} = \sqrt{\frac{801}{81}} = \frac{3\sqrt{89}}{9} = \boxed{\frac{\sqrt{89}}{3}\ u}$$

• Otra forma: $d(P, s) = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$ donde $Q \in s$ y $\vec{v}$ es un vector direccional de s.

$$\left.\begin{matrix} P(2,3,1) \\ Q(0,1,-2) \end{matrix}\right| \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-2, -2, -3)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} + 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} = (2, 7, -6) \Rightarrow |\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}| = \sqrt{4 + 49 + 36} = \sqrt{89}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

Y por tanto: $d(P,s)=\boxed{\dfrac{\sqrt{89}}{3}\ u}$

B.3. a) *(1,25 puntos)* Sea la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$. Determine el dominio y las asíntotas de $f(x)$, si existen.

b) *(1,25 puntos)* Determine el área del recinto encerrado por las funciones $f(x)=-x^2+3$ y $g(x)=1$.

SOLUCIÓN.

a) • Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

• Asíntotas verticales: $\boxed{x=-1}$ y $\boxed{x=1}$ pues $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty$

• Asíntota oblicua: $\dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}\ \Rightarrow\ \boxed{y=x}$ es una asíntota oblicua de la función

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x & x \\ \hline \quad\quad x & \end{array}$$

b) Consideremos la función diferencia $d(x)=f(x)-g(x)=-x^2+2$ y calculemos el área del recinto limitado por esta función y el eje OX.

Los puntos de corte de la función $d(x)$ y el eje de abscisas son: $-x^2+2=0\ \Rightarrow\ x=\pm\sqrt{2}$.

Tenemos: $A=\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}\left(-x^2+2\right)dx=\left[-\dfrac{x^3}{3}+2x\right]_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}}=\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}\right)-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}\right)=$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{3}=\boxed{\frac{8\sqrt{2}}{3}\ u^2}$$

B.4. a) *(1 punto)* Determine qué valor debe tomar k para que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+kx-5}\right)=1$

b) *(1,5 puntos)* Calcule: $\int 2x\left[\ln(x)\right]^2 dx$

SOLUCIÓN.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+kx-5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2x-\sqrt{4x^2+kx-5}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+kx-5}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+kx-5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-4x^2-kx+5}{2x+\sqrt{4x^2+kx-5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-kx}{2x+2x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-kx}{4x}=-\frac{k}{4}=1\ \Rightarrow\ \boxed{k=-4}$$

b) $\int 2x\left[\ln(x)\right]^2 dx=\left|\begin{array}{l} u=\left[\ln(x)\right]^2\ \Rightarrow\ du=2\ln x\,\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=2x\,dx\ \Rightarrow\ v=x^2\end{array}\right|=x^2\left[\ln(x)\right]^2-\int 2x^2\dfrac{1}{x}\ln x\,dx=x^2\left[\ln(x)\right]^2-\int 2x\ln x\,dx=$

$\left|\begin{array}{l} u=\ln x\ \Rightarrow\ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=2x\,dx\ \Rightarrow\ v=x^2\end{array}\right|=x^2\left[\ln(x)\right]^2-\left[x^2\ln x-\int x^2\dfrac{1}{x}\,dx\right]=x^2\left[\ln(x)\right]^2-x^2\ln x+\dfrac{x^2}{2}+C=\boxed{x^2\left[\ln^2 x-\ln x+\dfrac{1}{2}\right]+C}$