Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A. 1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x + 4y + 12z &= 0 \\ 2x + y + 4z &= \lambda \\ \lambda x + y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

a) *(1 punto)* Determine los valores de λ para los que el sistema de ecuaciones tiene solución única.

b) *(1,5 puntos)* Resuelva el sistema, si es posible, cuando $\lambda = 4$ y cuando $\lambda = 0$.

SOLUCIÓN.

a) Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 4 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & \lambda \\ \lambda & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$

El sistema tiene solución única cuando $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3$. Estudiemos el rango de A para los distintos valores del parámetro:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 4 \\ \lambda & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6\lambda + 16\lambda + 24 - 12\lambda - 4\lambda - 48 = 6\lambda - 24 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 4 \;\Rightarrow\; \text{el sistema tiene solución única } \forall\, \lambda \neq 4 .$$

b) · Para $\lambda = 4$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Orlemos este menor con los términos independientes para ver cuál es el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 48 - 96 \neq 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} B = 3 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} B \;\Rightarrow\; \text{el sistema es incompatible, no tiene solución}$$

· Para $\lambda = 0$, el sistema es compatible determinado. Puesto que se trata ahora de un sistema homogéneo, la única solución es la trivial: $x = y = z = 0$

A. 2. a) *(1,25 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi: 2x + 3y - z = 1$$

$$\pi': \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = -1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) *(1,25 puntos)* Encuentre la recta que pasa por el punto $P = (0, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π'. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

SOLUCIÓN.

a) Escribamos el plano π' en forma general: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-1 \\ 2 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = -z - 1 + 2y - 2 + 2x - y + 1 = 2x + y - z - 2 = 0$

En el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ se tiene: $\text{rg}\,A=\text{rg}\,B=2 \Rightarrow$ los planos se cortan en una recta.

b) La recta queda determinada por el punto $P(0,1,1)$ y un vector normal al plano π': $\vec{n}=(2,1,-1)$.

Su ecuación continua es: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-2 \\ -x=2z-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+2=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}$

A. 3. Sea la función:

$$f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine su dominio de definición.

b) *(1 punto)* Encuentre las asíntotas que tenga esa función.

c) *(1 punto)* Considere ahora la función:

$$g(x)=\frac{(x+2)^2}{x+3}$$

Encuentre sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.

a) $f(x)$ es una función racional: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Su dominio es $D(f)=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R} \,/\, Q(x)=0\}$.

Tenemos: $x^2+4x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{-4\pm 2}{2}=\begin{cases} x=-3 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{-3,-1\}$

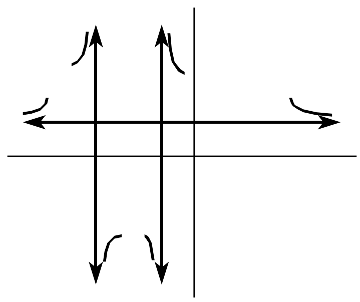
b) · Asíntotas verticales: $x=-3$ y $x=-1$ pues $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=\infty$

Además: $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}=+\infty$

· Asíntota horizontal: $y=1$ pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}=1$

Además: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}=1^+$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}=1^+$



c) $g'(x)=\dfrac{2(x+2)(x+3)-(x+2)^2}{(x+3)^2}=\dfrac{(x+2)[2x+6-x-2]}{(x+3)^2}=\dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}=0 \Rightarrow x=-2$, $x=-4$

Se tiene:

g ' > 0	-4	**g ' < 0**	-3	**g ' < 0**	-2	**g ' > 0**

Es decir: la función es creciente en $(-\infty,-4)\cup(-2,+\infty)$ y decreciente en $(-4,-3)\cup(-3,-2)$

· Los posibles puntos de máximo o de mínimo relativos son los de abscisas $x=-4$ y $x=-2$. En $x=-4$ la función tiene un máximo relativo puesto que es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha y en $x=-2$ un mínimo relativo porque es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.

A. 4. a) *(1,25 puntos)* Calcule:

$$\int_2^3 \frac{1}{2x^2-4x+2}\,dx$$

b) *(1,25 puntos)* Determine el límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2\ln(x)+[\ln(x)]^2}{x[1+\ln(x)]}$$

SOLUCIÓN.

a) $2x^2-4x+2=2\left(x-1\right)^2$.

Obtengamos una primitiva de la función: $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-4x+2}\,dx=\int \frac{1}{2\left(x-1\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int \left(x-1\right)^{-2}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{\left(x-1\right)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{2\left(x-1\right)}$

Se tiene entonces: $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{2x^2-4x+2}\,dx=\left[-\frac{1}{2\left(x-1\right)}\right]_2^3=\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\ln(x)+\left[\ln(x)\right]^2}{x\left[1+\ln(x)\right]}=\frac{\infty}{\infty}$. Apliquemos la regla de L’Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\ln(x)+\left[\ln(x)\right]^2}{x\left[1+\ln(x)\right]}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+2\ln(x)\,\frac{1}{x}}{\left[1+\ln(x)\right]+x\,\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\left[1+\ln(x)\right]}{x}}{2+\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left[1+\ln(x)\right]}{x\left[2+\ln(x)\right]}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,\frac{1}{x}}{\left[2+\ln(x)\right]+x\,\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{3+\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x\left[3+\ln(x)\right]}=\frac{2}{\infty}=0$$

<u>**OPCIÓN B**</u>

B. 1. Sean A y B las dos matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 0 & -1\\ 3 & a\end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* ¿Para qué valores de a existe la inversa de AB? ¿Y la de BA?

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la inversa de la matriz:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

Compruebe que cuando la matriz encontrada se multiplica por la izquierda por C, se obtiene la identidad.

SOLUCIÓN.

a) $AB=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 0 & -1\\ 3 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2a & a-1\\ 3 & a-1\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 0 & -1\\ 3 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2a & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 3a & a+3 & a\end{pmatrix}$

$\cdot \begin{vmatrix} -2a & a-1 \\ 3 & a-1 \end{vmatrix} = -2a^2 + 2a - 3a + 3 = -2a^2 - a + 3 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} = \dfrac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} a = -\dfrac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$

Por tanto, $\exists (AB)^{-1} \ \forall a \neq -\dfrac{3}{2}$ y 1

$\cdot \begin{vmatrix} -2a & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3a & a+3 & a \end{vmatrix} = 2a^2 + 3a + 3a - 2a^2 - 6a = 0 \quad \forall a \Rightarrow$ No existe la matriz inversa de BA para ningún valor de a.

b) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 18 + 18 - 24 - 24 - 18 = 2$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta}} (\text{Adj}\, C) = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} (\text{Adj}\, C)^t = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} C^{-1} = \frac{(\text{Adj}\, C)^t}{|C|} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & -3/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & -3/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ luego, en efecto, se cumple.

B. 2. Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{k} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}, \quad \text{con} \quad k \neq 0$$

$$s: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

a) *(2 puntos)* Estudie las posiciones relativas de las rectas según los diferentes valores de k .

b) *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de k para los que las rectas son perpendiculares?

SOLUCIÓN.

a) $\vec{u} = (k, 2, -1)$ es un vector direccional de r y $P(1, 2, 0)$ un punto de la misma.

Busquemos un vector direccional de s:

$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - y \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - 2x + 1 = -x + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow$ dos puntos de s: $\begin{vmatrix} A(0, -1, 1) \\ B(1, 1, 0) \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -1)$

· Si $k = 1$: $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow$ r y s son coincidentes o paralelas. Como $P \notin s$ pues sus coordenadas no verifican las ecuaciones de s, las dos rectas son paralelas.

· Si $k \neq 1$: las rectas se cruzan o se cortan. Consideremos un vector de origen en r y extremo en s: $\overrightarrow{PB} = (0, -1, 0)$ y veamos si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PB}$ son linealmente dependientes (las rectas se cortan) o independientes (las rectas se cruzan):

$\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - k \neq 0 \quad \forall k \neq 1 \Rightarrow$ los vectores son independientes y por tanto las rectas se cruzan.

b) Las rectas son perpendiculares si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow k + 4 + 1 = 0 \Rightarrow k = -5$

B. 3. a) Considere las funciones:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 3 - x.$$

(0,5 puntos) Determine los puntos de corte de esas dos funciones.

(1 punto) Determine el área encerrada entre esas dos funciones.

b) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$h(x) = x^6 + 2.$$

SOLUCIÓN.

a) · Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones de ambas funciones:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow 3 - x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = -2 \Rightarrow (-2, 5) \\ x = 1 \Rightarrow (1, 2) \end{cases}$$

· Consideremos la función diferencia: $d(x) = g(x) - f(x) = 3 - x - x^2 - 1 = -x^2 - x + 2$

Tenemos: $A = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = -3 - \frac{1}{2} + 8 = \frac{9}{2}\ u^2$

b) · Máximos y mínimos relativos: $h'(x) = 6x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$ (posible punto de máximo o de mínimo)

$h''(x) = 30x^4 : \ h''(0) = 0$; $h'''(x) = 120x^3 : \ h'''(0) = 0$; $h^{IV}(x) = 360x^2 : \ h^{IV}(0) = 0$

$h^{V}(x) = 720x : \ h^{V}(0) = 0$; $h^{VI}(x) = 720 > 0$

Como la primera derivada que no se anula es de orden par y es positiva, en $x = 0$ $h(x)$ tiene un mínimo relativo.

· La función no tiene puntos de inflexión pues en $x = 0$ que anula la segunda derivada, ya sabemos que hay un mínimo relativo.

B. 4. a) *(1,25 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule:

$$\int \frac{e^x}{1 - e^{-x}}\, dx$$

b) *(1,25 puntos)* Calcule:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}}$$

SOLUCIÓN.

a) $t = e^x \Rightarrow dt = e^x\, dx$

$$\int \frac{e^x}{1 - e^{-x}}\, dx = \int \frac{dt}{1 - \frac{1}{t}} = \int \frac{t}{t-1}\, dt = \int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = t + \ln|t-1| + K = e^x + \ln\left|e^x - 1\right| + K$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}} = 1^{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x-1}{x+1} - 1\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x-1-x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{-2}{x+1}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\sqrt{x} \cdot \frac{x+1}{-2} \cdot \frac{-2}{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2\sqrt{x}}{x+1}} = e^0 = 1$$