Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las dos opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A1. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}$.

a) *(0,75 puntos)* Calcular el determinante de la matriz $\left(A\,A^T\right)$ con A^T la traspuesta de A.

b) *(0,75 puntos)* Estudiar para qué valores del parámetro α se satisface la ecuación

$$4|A|^2-2|A^T|+2\alpha^2=0 \quad \text{con } |A|=\det(A)$$

c) *(1 punto)* Obtener la inversa de A cuando sea posible.

SOLUCIÓN.

a) $A^T=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 1 & -\alpha\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot A^T=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 1 & -\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+1 & -\alpha\\ -\alpha & \alpha^2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|A\cdot A^T\right|=\begin{vmatrix}\alpha^2+1 & -\alpha\\ -\alpha & \alpha^2\end{vmatrix}=\alpha^4+\alpha^2-\alpha^2=\alpha^4$$

b) $|A|=-\alpha^2 \quad ; \quad |A^T|=-\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad 4\alpha^4+2\alpha^2+2\alpha^2=0 \quad \Rightarrow \quad 4\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=0$

c) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A|\neq 0: \quad |A|=-\alpha^2=0 \Rightarrow \alpha=0$ luego $\exists A^{-1} \ \forall\alpha\neq 0$. Calculemos A^{-1}:

$$(\text{Adj } A)=\begin{pmatrix}-\alpha & 0\\ -1 & \alpha\end{pmatrix} \longrightarrow (\text{Adj } A)^T=\begin{pmatrix}-\alpha & -1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1}=\frac{(\text{Adj } A)^T}{|A|}=\begin{pmatrix}1/\alpha & 1/\alpha^2\\ 0 & -1/\alpha\end{pmatrix}$$

A2. Para la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

a) *(1 punto)* Estudiar su continuidad.

b) *(0,75 puntos)* Razonar si $g(x)=\left(x^2-1\right)f(x)$ es una función derivable.

c) *(0,75 puntos)* Calcular $\int_2^3 f(x)\,dx$

SOLUCIÓN.

a) Por tratarse de una función racional, la función es continua excepto en los puntos cuyas abscisas anulan el denominador. En este caso, $f(x)$ tiene un único punto de discontinuidad en $x=1$ (discontinuidad no evitable con asíntota vertical)

b) $g(x)=\left(x^2-1\right)f(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)(2x+1)}{x-1}$ que no es derivable en $x=1$ porque es discontinua. $\forall x\neq 1$, $g(x)$ es derivable.

c) Obtengamos una primitiva de $f(x)$: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}=2+\dfrac{3}{x-1} \Rightarrow \int f(x)dx=\int\left(2+\dfrac{3}{x-1}\right)dx=2x+3\ln|x-1|$

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1\\ \hline -2x+2 & 2\\ \hline 3 & \end{array}$$

Por tanto:

$$\int_2^3 f(x)\,dx=\left[2x+3\ln|x-1|\right]_2^3=(6+3\ln 2)-(4+3\ln 1)=2+3\ln 2=2+\ln 8$$

A3. *(2,5 puntos)* En un campo hay plantados 50 manzanos. En este momento cada manzano produce 800 manzanas. Está estudiado que por cada manzano que se añade al campo, los manzanos producen 10 manzanas menos cada uno. Determinar el número de manzanos que se deben añadir para maximizar la producción de manzanas de dicho campo.

SOLUCIÓN.

Sea x el número de manzanos que se añaden a los 50 ya existentes. Cuando haya $(50+x)$ manzanos, cada uno dará $(800-10x)$ manzanas y la producción del campo será:

$$P=(50+x)\cdot(800-10x)=40000-500x+800x-10x^2=-10x^2+300x+40000$$

Veamos cuándo es máxima la producción: $P'=-20x+300=0 \quad \Rightarrow \quad x=15$ (punto crítico)
Y como $P''=-20<0$: $x=15$ maximiza la producción.

Por lo tanto, deben añadirse 15 manzanos para conseguir una producción máxima.

A4.
a) *(0,75 puntos)* Obtener la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-1,-1,1)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}=(1,-2,-1)$.
b) *(1 punto)* Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r que se obtiene como intersección de los planos $\begin{cases}\pi_1 \equiv x-2y-z=0\\ \pi_2 \equiv z-1=0\end{cases}$
c) *(0,75 puntos)* Estudiar si son linealmente independientes los vectores $\vec{v}_1\,(2,1,0)$, $\vec{v}_2\,(0,-2,0)$, $\vec{v}_3\,(0,1,1)$.

SOLUCIÓN.

a) Sea π el plano buscado. Como $\vec{v}=(1,-2,-1)\perp\pi$: $\pi\equiv x-2y-z+D=0$
Y como $A\in\pi$: $-1+2-1+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=0 \quad \Rightarrow \quad \pi\equiv x-2y-z=0$

b) Para escribir las ecuaciones paramétricas de la recta, necesitamos un punto de la misma, $P(x_0, y_0, z_0)$, y un vector direccional, $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$:

$$\begin{cases} x=x_0+tu_1\\ y=y_0+tu_2\\ z=z_0+tu_3\end{cases}$$

Obtengamos dos puntos de la recta: $\begin{cases}\pi_1\equiv x-2y-z=0\\ \pi_2\equiv z-1=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad z=1\ ,\ x=2y+1 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l}\text{Para } y=0:\ P(1,0,1)\\ \text{Para } y=1:\ Q(3,1,1)\end{array}\right.$

Tenemos entonces: $P(1,0,1) \quad \vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(2,1,0)$ y por tanto: $r\equiv\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=1\end{cases}$

c) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-4\neq 0 \quad \Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes.

OPCIÓN B

B1. *(2,5 puntos)* Utilizar las propiedades de los determinantes para obtener los valores de a y b que satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a-b & 0 & 1 \\ a+2b & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & a \\ a^2 & ba^2 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN.

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a-b & 0 & 1 \\ a+2b & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ a & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ -b & 0 & 1 \\ 2b & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2a-5b=0 \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a & a \\ a^2 & ba^2 \end{vmatrix} = 0 \iff a^3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = 0 \iff a^3\left(b-1\right)=0 \quad (2)$$

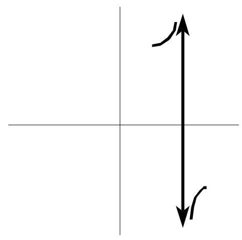
De la igualdad (2): $a=0$; $b=1$. Sustituyendo en la igualdad (1): $\left| \begin{array}{l} a=0 \Rightarrow b=0 \\ b=1 \Rightarrow a=\dfrac{5}{2} \end{array} \right.$

B2. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x}$. Determinar:

a) *(0,5 puntos)* Su dominio de definición.
b) *(0,5 puntos)* Sus asíntotas.
c) *(0,75 puntos)* Máximos y mínimos.
d) *(0,75 puntos)* Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIÓN.

a) $f(x)$ es una función racional. Su dominio es el conjunto de los números reales excepto los valores que anulen el denominador. Por tanto: $D(f)=\mathbb{R}-\{4\}$



b) - Asíntotas verticales: $x=4$ pues $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\infty$.

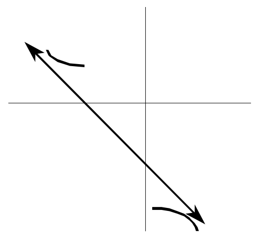
Además: $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x^2}{4-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x^2}{4-x}=-\infty$

- Asíntotas horizontales u oblicuas:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -x+4 \\ \cline{2-2} -x^2+4x & -x-4 \\ \cline{1-1} 4x & \\ -4x+16 & \\ \cline{1-1} 16 & \end{array}$$

$f(x)=\dfrac{x^2}{4-x}=-x-4+\dfrac{16}{4-x} \Rightarrow y=-x-4$ es una asíntota oblicua de la función.

Además: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{16}{4-x}=0^+$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{16}{4-x}=0^-$



c) $f'(x)=\dfrac{2x(4-x)+x^2}{(4-x)^2}=\dfrac{-x^2+8x}{(4-x)^2}=0 \Rightarrow x(-x+8)=0 \Rightarrow x=0$; $x=8$ (puntos críticos)

$f''(x)=\dfrac{(-2x+8)(4-x)^2+(-x^2+8x)2(4-x)}{(4-x)^4}$ y como: $\left| \begin{array}{l} f''(0)>0 \Rightarrow \text{en } x=0 \text{ hay un mínimo relativo} \\ f''(8)<0 \Rightarrow \text{en } x=8 \text{ hay un máximo relativo} \end{array} \right.$

Por tanto, la función tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ y un máximo relativo en $(8,-16)$.

d)

	$f'<0$		$f'>0$		$f'>0$		$f'<0$
	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	8	$\searrow$

Creciente: $(0\,,4)\cup(4\,,8)$

Decreciente: $(-\infty\,,0)\cup(8\,,+\infty)$

B3.

a) *(1,5 puntos)* Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-4}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

b) *(1 punto)* Utilizar el cambio de variable $t^2=1+x^2$ para calcular $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)=\cos 0=1$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}=\frac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\pi}=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^x=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-4}-1\right)\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x}{x-4}\right)}=e^8$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{1}{2}$$

b) $t^2=1+x^2 \;\Rightarrow\; 2t\,dt=2x\,dx \;\Rightarrow\; t\,dt=x\,dx$

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int\frac{x^2.x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\left(t^2-1\right)t\,dt}{t}=\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{1}{3}t^3-t+K=\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}-\sqrt{1+x^2}+K$$

B4. *(2,5 puntos)* Hallar el punto D de la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=1\end{cases}$ que esté a la misma distancia de los puntos $C=(1,-1,2)$ y $B\,(1,1,2)$. Razonar si la recta r es perpendicular o no al plano $\pi\equiv -x+2y+z=0$.

SOLUCIÓN.

$$D\in r \;\Rightarrow\; D(1+2t\,,t\,,1)$$

$$d\,(C\,,D)=d\,(B\,,D)\;\Rightarrow\;\sqrt{(1+2t-1)^2+(t+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{(1+2t-1)^2+(t-1)^2+(1-2)^2}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4t^2+t^2+2t+1+1=4t^2+t^2-2t+1+1 \;\Rightarrow\; 4t=0 \;\Rightarrow\; t=0 \;\Rightarrow\; D(1\,,0\,,1)$$

Un vector direccional de la recta es $\vec{u}=(2\,,1\,,0)$ y un vector normal al plano es $\vec{n}=(-1\,,2\,,1)$. Como las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{n}$ no son proporcionales, $\vec{u}$ y $\vec{n}$ no tienen la misma dirección y la recta no es perpendicular al plano.