Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las dos opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A1. **a)** Estudiar para qué valores de a el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$ es no nulo. Para $a=3$, obtener el determinante de la matriz $2A$. *(1,5 puntos)*

b) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular el rango de $(AB)^T$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) Veamos para qué valores de a el determinante es nulo:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{vmatrix}=-a^2(a-1)+2a^2(a-1)=a^2(a-1)=0 \;\begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

luego $|A|\neq 0 \;\; \forall a\neq 0$ y 1.

Para $a=3$: $|2A|\overset{(1)}{=}2\cdot 2\cdot 2\cdot |A|=8\cdot 9\cdot 2=144$

(1) Si multiplicamos por un número todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada, su determinante queda multiplicado por ese número. Al calcular la matriz $2A$, los elementos de las tres líneas (filas o columnas) se multiplican por 2. De ahí que el determinante quede multiplicado tres veces por 2.

b) $rg\left(A\cdot B\right)^T=rg\left(A\cdot B\right)$ pues la traspuesta de una matriz se obtiene intercambiando las filas por las columnas y el rango de filas y de columnas de una matriz es el mismo.

Calculemos $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$ y obtengamos su rango:

El único menor de orden tres es: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \end{vmatrix}=-12-6+18=0 \;\Rightarrow\; rg(A)<3$

y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4+2=6\neq 0 \;\Rightarrow\; rg\left(AB\right)^T=rg\left(AB\right)=2$

A2. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & -\infty<x\leq 0 \\ sen(ax) & 0<x<\pi \\ (x-\pi)^2+1 & \pi\leq x<+\infty \end{cases}$

a) Calcular los valores de a para los cuales $f(x)$ es una función continua. *(1 punto)*

b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para cada uno de esos valores. *(1 punto)*

c) Obtener $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$. *(0,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que $f(x)$ sea continua $\forall x$ debe serlo en $x=0$ y en $x=\pi$.

Para que lo sea en $x=0$ debe ser: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \iff \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[sen(ax)\right] \iff 0=0 \Rightarrow$ la función es continua en $x=0 \quad \forall a$ porque además $f(0)=0$.

Para que lo sea en $x=\pi$ debe ser: $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) \iff \lim\limits_{x\to \pi}\left[sen(ax)\right]=\lim\limits_{x\to \pi}\left[\left(x-\pi\right)^2+1\right] \iff$

$$\iff sen(\pi a)=1 \Rightarrow \pi a=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow a=\frac{1}{2}+2k \quad k=0,1,2,...$$

b) Para los valores de *a* encontrados, la función es $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & -\infty<x\le 0 \\ sen\left(\dfrac{x}{2}+2kx\right) & 0<x<\pi \\ (x-\pi)^2+1 & \pi\le x<+\infty \end{cases}$ y la función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & si\ -\infty<x\le 0 \\ \cos\left(\dfrac{x}{2}+2kx\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}+2k\right) & si\ 0<x<\pi \\ 2\left(x-\pi\right) & si\ \pi\le x<+\infty \end{cases}.$$

Derivabilidad en $x=0$: $\left.\begin{array}{l} f'\left(0^-\right)=2 \\ f'\left(0^+\right)=\dfrac{1}{2}+2k \end{array}\right| \Rightarrow 2\neq\dfrac{1}{2}+2k$ para $k\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x=0$.

Derivabilidad en $x=\pi$: $\left.\begin{array}{l} f'\left(\pi^-\right)=0 \\ f'\left(\pi^+\right)=0 \end{array}\right| \Rightarrow f(x)$ es derivable en $x=\pi$

c) $$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=0-\left(-\frac{1}{3}+1\right)=-\frac{2}{3}$$

A3. Encontrar el polinomio de grado dos $p(x)=ax^2+bx+c$ sabiendo que satisface: en $x=0$ el polinomio vale 2, su primera derivada vale 4 para $x=1$ y su segunda derivada vale 2 en $x=0$.
Estudiar si el polinomio obtenido es una función par. ¿Tiene en $x=0$ un punto de inflexión? *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

- $p(0)=2 \Rightarrow c=2$

  $p'(x)=2ax+b \Rightarrow p''(x)=2a \Rightarrow \left|\begin{array}{l} p''(0)=2 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1 \\ p'(1)=4 \Rightarrow 2+b=4 \Rightarrow b=2 \end{array}\right.$

  Por tanto: $p(x)=x^2+2x+2$

- $p(-x)=(-x)^2+2(-x)+2=x^2-2x+2\neq p(x) \Rightarrow$ no es una función par

- No, pues $p''(x)=2 \quad \forall x \Rightarrow$ no tiene puntos de inflexión (por otra parte, se trata de una parábola que no los tiene)

A4. Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$ y $s \equiv x-1=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{2}$

a) Justificar si son o no perpendiculares. *(1 punto)*
b) Calcular la distancia del punto $P\left(16\,,0\,,0\right)$ a la recta *r*. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Obtengamos un vector direccional de cada una de las rectas:

De r: dos puntos de la recta son, por ejemplo $A(3\,,2\,,1)$ y $B(7\,,0\,,2)$ $\Rightarrow$ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(4\,,-2\,,1)$
De s: $\vec{v}=(1\,,3\,,2)$
$\vec{u}\cdot\vec{v}=4-6+2=0 \;\Rightarrow\; \vec{u}\perp\vec{v} \;\Rightarrow\; r\perp s$

b) $$d\left(P\,,r\right)=\frac{\left|\,\overrightarrow{AP}\times\vec{u}\,\right|}{|\,\vec{u}\,|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 13 & -2 & -1\\ 4 & -2 & 1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{16+4+1}}=\frac{\left|-2\vec{i}-4\vec{j}-26\vec{k}+8\vec{k}-13\vec{j}-2\vec{i}\,\right|}{\sqrt{21}}=\frac{\left|\left(-4\,,-17\,,-18\right)\right|}{\sqrt{21}}=$$

$$=\frac{\sqrt{16+289+324}}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{629}}{\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{629}{21}}\simeq 5,47 \text{ u}$$

OPCIÓN B

B1. **a)** Estudiar para qué valores de *x*, la matriz inversa de $\begin{pmatrix} x & -2\\ 5 & -x\end{pmatrix}$ coincide con su opuesta. *(1,5 puntos)*

b) Dos hermanos de tercero y cuarto de primaria iban camino del colegio con sus mochilas cargadas de libros todos del mismo peso. Uno de ellos se lamentaba del peso que transportaba y el otro le dijo: *"¿De qué te quejas? Si yo te cogiera un libro, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio si te diera un libro, tu carga igualaría a la mía"*
¿Cuántos libros llevaba cada hermano? *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) Sea $A=\begin{pmatrix} x & -2\\ 5 & -x\end{pmatrix}$ la matriz dada. Su opuesta es: $-A=\begin{pmatrix} -x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix}$.

Calculemos su matriz inversa. El determinante de la matriz es: $|\,A\,|=\begin{vmatrix} x & -2\\ 5 & -x\end{vmatrix}=-x^2+10$

$$A=\begin{pmatrix} x & -2\\ 5 & -x\end{pmatrix}\xrightarrow{(Adj\ A)}\begin{pmatrix} -x & -5\\ 2 & x\end{pmatrix}\xrightarrow{(Adj\ A)^T}\begin{pmatrix} -x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{(Adj\ A)^T}{|\,A\,|}}A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{-x}{-x^2+10} & \dfrac{2}{-x^2+10}\\ \dfrac{-5}{-x^2+10} & \dfrac{x}{-x^2+10}\end{pmatrix}$$

Para que $A^{-1}=-A \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \dfrac{-x}{-x^2+10} & \dfrac{2}{-x^2+10}\\ \dfrac{-5}{-x^2+10} & \dfrac{x}{-x^2+10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; -x^2+10=1 \;\Rightarrow\; x^2=9 \;\Rightarrow\; x=\pm 3$

b) Sea *x* el número de libros que lleva el primero de ellos e *y* los que lleva el segundo. Se tiene:

$$\begin{cases} x+1=2(y-1) \\ x-1=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y=3 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \quad y=5 \ ; \ x=7$$

luego el primero lleva 7 libros y el segundo 5.

B2. Sea $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}$

a) Calcular el dominio de $f(x)$. *(0,5 puntos)*
b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. *(1 punto)*
c) Analizar las asíntotas de $f(x)$ y calcular las que existan. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) Por tratarse de una función racional:

$$D(f)=\mathbb{R}-\left\{ x\in\mathbb{R} \ / \ x^2-x^3=0 \right\}=\mathbb{R}-\left\{ x\in\mathbb{R} \ / \ x^2(1-x)=0 \right\}=\mathbb{R}-\{ 0,1 \}$$

b) El crecimiento y decrecimiento de una función depende del signo de $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(4x-1)\left(x^2-x^3\right)-\left(2x^2-x\right)\left(2x-3x^2\right)}{\left(x^2-x^3\right)^2}=\frac{x^2\left[(4x-1)(1-x)-(2x-1)(2-3x)\right]}{x^4(1-x)^2}=$$

$$=\frac{4x-4x^2-1+x-4x+6x^2+2-3x}{x^2(1-x)^2}=\frac{2x^2-2x+1}{x^2(1-x)^2}$$

El denominador es positivo $\forall x$. Estudiemos el signo del numerador: $2x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{4}$.

Observamos que el numerador no cambia de signo y que $2x^2-2x+1>0$

Por tanto, la función es creciente.

c) C Asíntotas verticales: pueden serlo $x=0$ y $x=1$.

$x=0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2x-1)}{x^2(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{x(1-x)}=\infty \Rightarrow x=0$ es una asíntota vertical de la función.

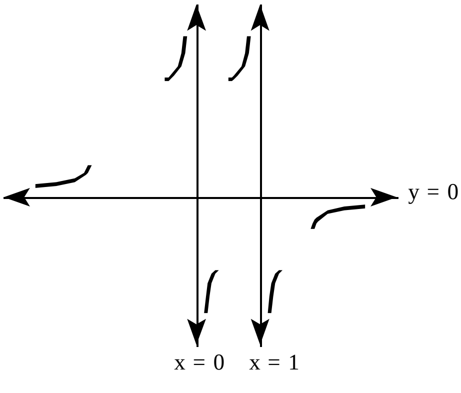
Estudiemos la posición de la gráfica respecto a la asíntota:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x-1}{x(1-x)}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x-1}{x(1-x)}=-\infty$

$x=1$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=\infty \Rightarrow x=1$ es una asíntota vertical de la función

Estudiemos la posición relativa de la gráfica respecto a la asíntota:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=-\infty$



C Asíntotas horizontales u oblicuas:

$f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=0+\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3} \Rightarrow y=0$ es una asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=0^+$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2-x^3}=0^-$

B3. **a)** Hallar el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$. *(1,25 puntos)*

b) Calcular $\underset{x\to\infty}{lím} \left(\dfrac{2\ln n}{\ln(7n^2)}\right)^{\ln n}$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Construimos la función diferencia de ambas funciones $f(x) = x^3 - 4x$ y calculamos el área limitada por esta función y el eje OX:

$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x = -2\ ,\ x = 2$ (puntos de corte de $f(x)$ y el eje de abscisas). Se tiene:

$$S = \left| \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right) dx \right| + \left| \int_{0}^{2} \left(x^3 - 4x\right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{0}^{2} \right| = \left| 0 - 4 + 8 \right| + \left| 4 - 8 - 0 \right| = 8\ \text{u}^2$$

b) $$\underset{n\to\infty}{lím} \left(\frac{2\ln n}{\ln(7n^2)}\right)^{\ln n} = \underset{n\to\infty}{lím} \left(\frac{2\ln n}{\ln 7 + 2\ln n}\right)^{\ln n} = 1^{\infty} = e^{\underset{n\to\infty}{lím} \left(\frac{2\ln n}{\ln 7 + 2\ln n} - 1\right)\cdot \ln n} = e^{\underset{n\to\infty}{lím} \left(\frac{2\ln n - \ln 7 - 2\ln n}{\ln 7 + 2\ln n}\right)\cdot \ln n} = e^{\underset{n\to\infty}{lím} \left(\frac{-\ln 7 \cdot \ln n}{\ln 7 + 2\ln n}\right)} =$$

$$= e^{\underset{n\to\infty}{lím} \left(\frac{-\ln 7 \cdot \ln n}{2\ln n}\right)} = e^{\frac{-\ln 7}{2}} = e^{-\ln\sqrt{7}} = \frac{1}{e^{\ln\sqrt{7}}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

B4. **a)** Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(3, -2, 2)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y - z = 0$. *(1,75 puntos)*

b) Estudiar si los vectores $\vec{a} = (1, -1, -1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (0, 0, 1)$ son linealmente independientes. *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) El plano está definido por el punto $(1, 1, 1)$ y los vectores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1, -1)$ normal al plano π:

La ecuación del plano es: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 - 2z + 2 + 2y - 2 + 6z - 6 + 2y - 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x + 4y + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 3 = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes.