Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Hay que elegir una de las dos opciones y contestar a sus cuestiones. La puntuación está detallada en cada una de las cuestiones o en sus distintas partes. Se permite el uso de calculadoras, pero los resultados, tanto analíticos como gráficos, deberán estar debidamente justificados.

OPCIÓN A

A1. a) Discutir y resolver cuando sea posible el siguiente sistema lineal: *(1,75 puntos)*

$$\left\{\begin{array}{c} ax+y=0 \\ -2x+y+az=1 \\ y+az=1 \end{array}\right.$$

b) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el vector $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ sea solución del sistema anterior? *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$

Comparemos el rango de ambas matrices. El máximo rango posible de ambas matrices es 3:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2+2a-a^2 = 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a=0 \quad \Rightarrow$$

- Si $a \neq 0$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} M = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado
- Si $a=0$: rg A = 2 pues el menor de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y rg M = 3 pues el menor de la matriz ampliada $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Soluciones para el caso $a \neq 0$: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{2a} = \dfrac{a-a}{2a} = 0$ $\qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{2a} = \dfrac{a^2-a^2}{2a} = 0$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2a} = \frac{a+2-a}{2a} = \frac{1}{a}$$

b) No. Las soluciones obtenidas en el caso de compatibilidad exigen que $x=y=0$.

A2. a) Utilizar el cambio de variable $t^3 = 1 - x$ para calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-x)^{1/3} - 1}{x}$ *(1 punto)*

b) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ 1 - x & x \geq 1 \end{cases}$ y obtener $\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\, dx$. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $t^3 = 1 - x \;\Rightarrow\; x = 1 - t^3$ y cuando $x \to 0 \;\Rightarrow\; t^3 \to 1 \;\Rightarrow\; t \to 1$

Se tiene: $$\lim_{x \to 0} \frac{(1-x)^{1/3} - 1}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{t-1}{1-t^3} = \frac{0}{0} = \lim_{t \to 1} \frac{t-1}{-(t-1)\left(t^2+t+1\right)} = -\frac{1}{3}$$

b) La función es continua en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$. Estudiemos la continuidad en $x = 1$:

- $\exists\, f(1) = 0$
- $\exists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 + 1\right) = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (1 - x) = 0 \;\Rightarrow\; \nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

luego la función es discontinua en $x = 1$ (con una discontinuidad no evitable).

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} \left(x^2 + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1/2}^{1/2} = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12}$$

A3. Sea la función $f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$ con $x \in (0,1)$.

a) Calcular sus extremos relativos. *(1,5 puntos)*

b) Estudiar su crecimiento y decrecimiento y razonar si posee algún punto de inflexión. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = \ln x + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln \dfrac{x}{1-x} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x}{1-x} = 1 \;\Rightarrow\; x = 1 - x \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$ (punto crítico)

$f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} \;\Rightarrow\; f''\!\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 + 2 = 4 > 0 \;\Rightarrow\;$ En $x = \dfrac{1}{2}$ la función tiene un mínimo relativo

b) La función es continua en el intervalo $(0,1)$ por ser producto y suma de funciones continuas. Como tiene en $x = \dfrac{1}{2}$ un mínimo relativo: la función es decreciente en $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Veamos si tiene algún punto de inflexión:

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)} \neq 0 \;\; \forall x \;\Rightarrow\;$$ la función no tiene puntos de inflexión.

A4. a) Calcular el plano determinado por los puntos $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$. *(1 punto)*

b) Determinar el ángulo que forman los planos $\pi_1 \equiv \sqrt{2}x + y + z = 2$ y $\pi_2 \equiv z = 0$. *(0,75 puntos)*

c) Obtener el producto vectorial de $\vec{a} = (2,0,1)$ y $\vec{b} = (1,-1,3)$. *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) El plano está determinado por el punto $P(1,0,0)$ y los vectores $\overrightarrow{PQ} = (-1,1,0)$ y $\overrightarrow{PR} = (-1,0,1)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x-1+z+y=0 \iff x+y+z-1=0$$

b) El ángulo que forman los planos es el que forman los vectores normales a cada uno de ellos:

$$\overrightarrow{n_1} = \left(\sqrt{2}, 1, 1\right) \text{ y } \overrightarrow{n_2} = (0, 0, 1).$$

Se tiene:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2+1+1}\,\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^{\circ}$$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{j} - 2\vec{k} - 6\vec{j} + \vec{i} = (1, -5, -2)$

<u>OPCIÓN B</u>

B1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

a) Estudiar si existen valores de α y β para los cuales la matriz A sea simétrica. ¿Será la matriz $B = A\,A^T$ igual a la matriz identidad en algún caso? *(1 punto)*

b) Razonar cuál es la relación entre el determinante de A y el de B. *(0,75 puntos)*

c) Discutir y resolver cuando sea posible el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que A sea simétrica debe ser: $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow 2\operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 + k\pi$

Para que $B = A\,A^T = I_3$:

$$B = A\,A^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm 1$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta\cos^2\alpha + \beta\operatorname{sen}^2\alpha = \beta\left(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right) = \beta$; $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{vmatrix} = \beta^2$

Por tanto: $|B| = |A|^2$

c) Las matrices de los coeficientes B y ampliada M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 1 \end{array}\right)$

El único menor de orden 3 de la matriz de los coeficientes es $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{vmatrix} = \beta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$

Por tanto:

- Para $\beta \neq 0$: $\quad \text{rg}\, B = \text{rg}\, M = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\quad \Rightarrow \quad$ el sistema es compatible determinado.
- Para $\beta = 0$: $\quad \text{rg}\, B = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y $\text{rg}\, M = 3$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ el sistema es incompatible.

Las soluciones para $\beta \neq 0$ las hallamos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta^2 \end{vmatrix}}{\beta^2} = \frac{\beta^2}{\beta^2} = 1 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta^2 \end{vmatrix}}{\beta^2} = \frac{\beta^2}{\beta^2} = 1 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$$

B2. El número de socios de una ONG viene dado por la función $n(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$ donde x indica el número de años desde su fundación.

a) Calcular el número de socios iniciales en el momento fundacional y en el quinto año. *(0,5 puntos)*

b) ¿En qué año ha habido el menor número de socios? ¿Cuántos fueron?. *(1 punto)*

c) El cuarto año se produjo un cambio en la junta directiva, ¿influyó en el ascenso o descenso del número de socios?. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) - Para $x = 0$: $\quad n(0) = 26$ socios

- Para $x = 5$: $\quad n(5) = 21$ socios

b) Se debe obtener el mínimo de la función:

$$n'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 15x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{6} = \frac{15 \pm 9}{6} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$n''(x) = 12x - 30 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|l} n''(1) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ es un máximo relativo} \\ n''(4) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ es un mínimo relativo} \end{array}$$

Por lo tanto, el menor número de socios se ha producido al cuarto año. Su número es: $n(4) = 10$ socios.

c) Como la función es continua y alcanza su mínimo relativo en $x = 4$, a partir del cuarto año el número de socios crecerá.

B3. Sea $f(x) = \dfrac{x}{1 - \sqrt{1+x}}$ una función definida en $[-1, +\infty)$.

a) ¿Cuánto debe valer $f(0)$ para asegurar que $f(x)$ es continua en su dominio? Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{1 + \sqrt{1+x}}\, dx$. *(1,5 puntos)*

b) Para $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{1 + \sqrt{1+t}}\, dt$ calcular $G'(x)$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en $x=0$, debe ser $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Por lo tanto:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1+x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{\left(1-\sqrt{1+x}\right)\left(1+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{\cancel{1}-\cancel{1}-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{-\cancel{x}}=-2$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{1+\sqrt{1+x}}\,dx=\int_1^2\frac{\frac{x}{1-\sqrt{1+x}}}{1+\sqrt{1+x}}\,dx=\int_1^2\frac{x}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(1-\sqrt{1+x}\right)}\,dx=\int_1^2\frac{x}{\cancel{1}-\cancel{1}-x}\,dx=$$

$$=\int_1^2(-dx)=\left[-x\right]_1^2=-2+1=-1$$

b) $G(x)=\int_1^x\frac{f(t)}{1+\sqrt{1+t}}\,dt=\left[-t\right]_1^x=-x+1 \quad\Rightarrow\quad G'(x)=-1$

B4. Estudiar la posición relativa de la recta $r\equiv\frac{x+1}{3}=y-2=\frac{z}{2}$ y el plano determinado por los puntos $A(1,3,2)$, $B(2,0,1)$ y $C(1,4,3)$. ¿Son perpendiculares?. Hallar la distancia del punto $P\left(\frac{4}{5},\frac{13}{5},\frac{6}{5}\right)$ a la recta r.

(2,5 puntos)

SOLUCIÓN.

- Un vector direccional de r es $\vec{u}=(3,1,2)$ y dos vectores del plano son $\overrightarrow{AB}=(1,-3,-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,1,1)$. Veamos si son o no linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix}3&1&2\\1&-3&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=-9+2-1+3\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{los vectores son linealmente independientes} \quad\Rightarrow\quad \text{la recta y el plano se cortan}$$

en un punto.

- La recta y el plano serán perpendiculares si lo son el vector direccional de la recta y alguno de los vectores del plano. Para averiguarlo, calculemos el producto escalar:

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=(3,1,2)\cdot(1,-3,-1)=3-3-2\neq 0 \quad\Rightarrow\quad$ los vectores no son perpendiculares $\quad\Rightarrow\quad$ la recta y el plano no son perpendiculares.

- Un punto de la recta es $Q(-1,2,0) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{QP}=\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$. La distancia entre P y r viene dada por:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{QP}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{9}{5}&\frac{3}{5}&\frac{6}{5}\\3&1&2\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{9+1+4}}=\frac{\left|\frac{6}{5}\vec{i}+\frac{18}{5}\vec{j}+\frac{9}{5}\vec{k}-\frac{9}{5}\vec{k}-\frac{18}{5}\vec{j}-\frac{6}{5}\vec{i}\right|}{\sqrt{14}}=\frac{\left|\vec{o}\right|}{\sqrt{14}}=0$$

es decir, el punto P pertenece a la recta r.