**1. ÁLGEBRA.**

**Opción A**

a) *[1,5 puntos]* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de orden 2. Hallar la relación entre los parámetros *a*, *b* y *c* para que se verifique que $A^{-1} = 2I - A$.

b) *[1 punto]* Calcular, en función de los valores del parámetro *k*, el rango de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$.

**SOLUCIÓN.**

a) $A^{-1} = 2I - A \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \cdot A = 2I \cdot A - A^2 \quad \Leftrightarrow \quad I = 2A - A^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix}$$

Se tiene: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 2b & 2c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab & -ac \\ -bc & 2c-ab-c^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ab = -1 \\ ac = 0 \\ bc = 0 \\ 2c - ab - c^2 = 1 \end{cases}$

De la primera condición se sigue que a y b son distintos de cero, luego $c = 0$ (segunda y tercera condiciones). Para $c = 0$, la cuarta condición vuelve a ser $ab = -1$.

Por tanto, deben ser: $ab = -1$ , $c = 0$ .

b) Estudiemos el orden del mayor menor no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{vmatrix} = k - 1 - 30 - 5 + 3 + 2k = 3k - 33 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 11$

Por tanto:

- Si $k \neq 11$: $\quad \text{rg } B = 3$
- Si $k = 11$: $\quad \text{rg } B = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 \neq 0$

**Opción B**

a) *[1,25 puntos]* Resolver el siguiente determinante sin utilizar la regla de Sarrus: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a+c & -b-a & -c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix}$.

b) *[1,25 puntos]* Para $M = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$, calcular $M^n$ con $n \in \mathbb{N}$ .

**SOLUCIÓN.**

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a+c & -b-a & -c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & -a & b \\ c & -a & b \end{vmatrix} = 0$ pues tiene dos filas iguales

b) $M^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \Rightarrow \quad M^3 = M^2 \cdot M = M \quad \Rightarrow \quad M^4 = M^2 \cdot M^2 = I \quad \Rightarrow \quad \ldots$

Por tanto: $M^n = \begin{cases} I & \text{si n es par} \\ M & \text{si n es impar} \end{cases}$

## 2. GEOMETRÍA

### Opción A

a) *[1,5 puntos]* Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(5,0,1)$ y $B(4,1,0)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$.

b) *[1 punto]* Estudiar si los vectores $\vec{u}=(1,-1,1)$, $\vec{v}=(1,0,0)$ y $\vec{w}=(2,-2,1)$ son linealmente independientes.

**SOLUCIÓN.**

a) Para calcular la ecuación del plano necesitamos un punto (por ejemplo, el A) y dos vectores (el $\overrightarrow{AB}$ y el vector direccional de la recta r).

C Obtengamos dos puntos P y Q de r para obtener un vector direccional de la recta: $\overrightarrow{PQ}$

$$\begin{cases} x-2y=-3z \\ 2x+y=5+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-3z \\ 4x+2y=10+2z \end{cases} \Rightarrow 5x=10-z \Rightarrow x=2-\frac{z}{5} \quad , \quad y=5+z-2x=5+z-4+\frac{2z}{5}=1+\frac{7z}{5}$$

Elijamos dos valores para z: $\left.\begin{array}{l} \text{para } z=0: \quad x=2 \ , \ y=1 \Rightarrow P(2,1,0) \\ \text{para } z=5: \quad x=1 \ , \ y=8 \Rightarrow Q(1,8,5) \end{array}\right| \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(-1,7,5)$

C La ecuación del plano es: $\begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 5x-25-7z+7+y+z-1+5y+7x-35=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x+6y-6z-54=0 \Leftrightarrow 2x+y-z-9=0$

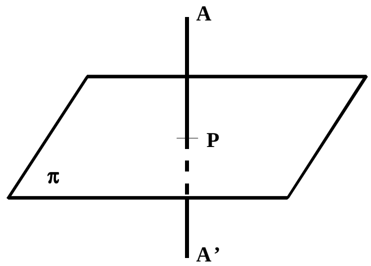
b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-2+1=-1\neq 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes.

### Opción B

a) *[1,5 puntos]* Hallar el punto simétrico de $A(2,0,1)$ respecto del plano $\pi \equiv x+2y+z=2$.

b) *[1 punto]* Obtener las ecuaciones de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$ en forma paramétrica y en forma continua.

**SOLUCIÓN**




a) C Calculamos la ecuación de la recta AA' perpendicular a $\pi$ que pasa por A:

Un vector direccional de la recta es el vector normal al plano $\vec{n}=(1,2,1)$

Por tanto, la ecuación paramétrica de la recta es: $\begin{cases} x=2+t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$

C Obtengamos las coordenadas del punto P de intersección de la recta y el plano:

$$2+t+4t+1+t=2 \quad\Rightarrow\quad 6t=-1 \quad\Rightarrow\quad t=-\frac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{11}{6}\ ,\ y=-\frac{1}{3}\ ,\ z=\frac{5}{6} \quad \text{es decir:} \quad P\left(\frac{11}{6},-\frac{1}{3},\frac{5}{6}\right)$$

C Y como P es el punto medio del segmento AA':

$$\frac{11}{6}=\frac{2+x}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{5}{3} \quad ; \quad -\frac{1}{3}=\frac{0+y}{2} \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{5}{6}=\frac{1+z}{2} \quad\Rightarrow\quad z=\frac{2}{3} \quad \text{luego:} \quad A'\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

b) Para hacerlo, obtengamos un punto y un vector direccional o lo que es equivalente, dos puntos de la recta:

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3-z \\ x-y=1+2z \end{cases} \overset{\text{sumando}}{\Rightarrow} 3x=4+z \quad\Rightarrow\quad x=\frac{4+z}{3} \quad ; \quad y=x-1-2z=\frac{4+z}{3}-1-2z=\frac{1-5z}{3}$$

y dando valores a z: Para $z=-1$: $x=1\ ,\ y=2$ es decir $P(1,2,-1)$
Para $z=2$: $x=2\ ,\ y=-3$ es decir $Q(2,-3,2)$

Como punto, utilizaremos $P(1,2,-1)$ ; y como vector direccional $\overrightarrow{PQ}=(1,-5,3)$ .

C La ecuación paramétrica es: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-5t \\ z=-1+3t \end{cases}$ y la ecuación continua: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+1}{3}$

**3. ANÁLISIS**

**Opción A**

**1.** Sean $f(x)=\cos(3x-1)$ y $h(x)=\text{sen}^2(x)$ .

a) *[0,5 puntos]* Calcular $g(x)=(h\circ f)(x)$ .
b) *[0,5 puntos]* Comprobar si $g(x)$ es una función par.
c) *[1,5 puntos]* Obtener $g'(x)$ y estudiar si es cierto que $g'(1/3)=0$ .

**SOLUCIÓN.**

a) $g(x)=(h\circ f)(x)=h[f(x)]=h[\cos(3x-1)]=\text{sen}^2[\cos(3x-1)]$

b) $g(-x)=\text{sen}^2[\cos(-3x-1)]=\text{sen}^2[\cos(3x+1)]\neq g(x) \quad\Rightarrow$ la función no es par

c) $g'(x)=2\cdot\text{sen}[\cos(3x-1)]\cdot\cos[\cos(3x-1)]\cdot[-\text{sen}(3x-1)]\cdot 3=$

$=-6\cdot\text{sen}[\cos(3x-1)]\cdot\cos[\cos(3x-1)]\cdot[\text{sen}(3x-1)]$

$g'(1/3)=-6\cdot\text{sen}[\cos(1-1)]\cdot\cos[\cos(1-1)]\cdot[\text{sen}(1-1)]=0$ puesto que $\text{sen}\ 0=0$

**2.** Sea $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}}$

a) *[0,5 puntos]* Calcular su dominio.
b) *[0,75 puntos]* Encontrar los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX y estudiar si la función es creciente en el intervalo $(0\,,1)$.

c) *[0,5 puntos]* Obtener $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x+2}$

d) *[0,75 puntos]* Hallar $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

**SOLUCIÓN.**

a) $D(f)=\left\{ x\in\mathbb{R} \;\; / \;\; \dfrac{x^3+2x^2}{x+2}\geq 0 \right\}$

$$\frac{x^3+2x^2}{x+2}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2\left(x+2\right)}{x+2}\geq 0 \;\; \forall x\in\mathbb{R}-\{-2\} \quad \text{luego } D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$$

b) C $\left\{\begin{array}{l} y=\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}} \\ y=0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}}=0 \quad\Rightarrow\quad x^3+2x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x^2\left(x+2\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0 \;,\; x=-2$

Y como $x=-2$ no forma parte del dominio, el único punto de corte es el $\left(0\,,0\right)$.

C $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}}}\cdot\dfrac{\left(3x^2+4x\right)\left(x+2\right)-\left(x^3+2x^2\right)}{\left(x+2\right)^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}}}\cdot\dfrac{3x^3+6x^2+4x^2+8x-x^3-2x^2}{\left(x+2\right)^2}=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}}}\cdot\frac{2x^3+8x^2+8x}{\left(x+2\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}}}\cdot\frac{x^3+4x^2+4x}{\left(x+2\right)^2}$$

En el intervalo $\left(0\,,1\right)$:

$x^3+2x^2>0$

$x+2>0 \quad\Rightarrow\quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad$ la función es creciente.

$x^3+4x^2+4x>0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2}{\left(x+2\right)^3}}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3}{x^3}}=1$

d) Calculemos una primitiva de $f(x)$:

$$\int\sqrt{\frac{x^3+2x^2}{x+2}}\,dx=\int\sqrt{\frac{x^2\left(x+2\right)}{x+2}}\,dx=\int\sqrt{x^2}\,dx=\left\{\begin{array}{ll}\displaystyle\int\left(-x\right)dx=-\frac{x^2}{2} & \text{para } x<0 \\ \displaystyle\int x\,dx=\frac{x^2}{2} & \text{para } x\geq 0\end{array}\right.$$

Por lo tanto: $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1$

**Opción B**

**1.** a) *[1,25 puntos]* Calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\, dx$

b) *[1,25 puntos]* Sea $f(x) = e^{ax}$, con $a \in \mathbb{R}$. Calcular $f^{(n)}(x) - a^n f(x)$, siendo $f^{(n)}(x)$ la derivada n-ésima de $f(x)$.

**SOLUCIÓN.**

a) Obtengamos una primitiva: $\int \cos^3(x)\, dx = \int \cos^2(x)\cdot\cos(x)\cdot dx = \int \left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right)\cdot\cos(x)\cdot dx =$

$= \int \cos(x)\, dx - \int \operatorname{sen}^2(x)\cdot d\left(\operatorname{sen}(x)\right) = \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x)$. Como la función no se anula en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\, dx = \left[\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x)\right]_0^{\pi/2} = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\frac{\pi}{2}\right) - \left(\operatorname{sen} 0 - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 0\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$$

b) Tenemos: $f'(x) = a\cdot e^{ax}$ ; $f''(x) = a^2\cdot e^{ax}$ ; ... ; $f^{(n)}(x) = a^n\cdot e^{ax}$.

Y por tanto: $f^{(n)}(x) - a^n f(x) = a^n\cdot e^{ax} - a^n\cdot e^{ax} = 0$

**2.** a) *[1,25 puntos]* Sea $f(x) = \begin{cases} \left(x^2+1\right)^{1/x} & x < 0 \\ \dfrac{x^4 + 2x + a}{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$. Estudiar para qué valores del parámetro *a* esta función es continua en $x = 0$.

b) *[1,25 puntos]* Entre los números cuya suma es 36, encontrar aquellos números positivos cuya suma de cuadrados sea mínima.

**SOLUCIÓN.**

a) Puesto que la función está definida en $x = 0$, para que sea continua debe ocurrir que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \iff \lim_{x\to 0}\left(x^2+1\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4+2x+a}{x+1} \iff (1)$$

Calculemos $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+1\right)^{1/x} = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+1-1\right)\cdot\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x} = e^0 = 1$ y por tanto: (1) $\iff$ $1 = a$

b) Sean los números: $x$ y $36 - x$. La función $f(x) = x^2 + \left(36 - x\right)^2$ debe ser mínima:

$$f(x) = x^2 + 1296 - 72x + x^2 = 2x^2 - 72x + 1296 \Rightarrow f'(x) = 4x - 72 = 0 \Rightarrow x = 18$$

Y como $f''(x) = 4 > 0 \Rightarrow$ la función es mínima para $x = 18$.

Por tanto, los números buscados son: 18 y 18.