**1. ÁLGEBRA.**

**Opción A**

*(2,5 puntos)* Hallar una matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 tal que

$$A^{-1}\,X\,A = B \quad \text{siendo} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**SOLUCIÓN.**

$$A^{-1}\,X\,A = B \iff X\,A = A \cdot B \iff X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

Calculemos $A^{-1}$: $\quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \left(\text{Adj}\,A^t\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{\left(\text{Adj}\,A^t\right)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}}$$

**Opción B**

a) *(1 punto)* Probar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

b) *(1,5 puntos)* Hallar la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 9z = 2 \end{cases}$ que además satisface que la suma de los valores correspondientes a cada una de las incógnitas es 4.

**SOLUCIÓN.**

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(4)}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b+a & c+\cancel{a}-b-\cancel{a} \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} (b-a)(c-a)(c-b)$$

Propiedades utilizadas:
(1) C2 – C1 , C3 – C1
(2) Desarrollo por los adjuntos de la primera fila
(3) Sacar factor común en ambas columnas
(4) C2 – C1
(5) Desarrollo por los adjuntos de la primera fila

b) Se debe añadir a las dos ecuaciones dadas la ecuación $x + y + z = 4$: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y + 9z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

Para resolverlo, aplicamos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&2&3\\2&4&9\\4&1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&3\\1&4&9\\1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{6+72-48-4}{4+3+18-12-2-9}=\frac{26}{2}=13 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&0&3\\1&2&9\\1&4&1\end{vmatrix}}{2}=\frac{2+12-6-36}{2}=\frac{-28}{2}=-14$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&0\\1&4&2\\1&1&4\end{vmatrix}}{2}=\frac{16+4-2-8}{2}=\frac{10}{2}=5$$

Por tanto: $\boxed{x=13\ ,\ y=-14\ ,\ z=5}$

**2. GEOMETRÍA**

**Opción A**

Se consideran la recta r y los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ siguientes: $r\equiv\begin{cases}x=2-3\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=4-\lambda\end{cases}$ , $\begin{array}{c}\pi_1\equiv 2-3x+2y-z=0\\ \pi_2\equiv 3+2x+2y-2z=0\end{array}$

a) *(1,25 puntos)* Determinar la posición relativa de los dos planos.
b) *(1,25 puntos)* Calcular la distancia de r a $\pi_2$ .

**SOLUCIÓN.**

a) $\vec{n_1}=(-3,2,-1)$ es un vector perpendicular a $\pi_1$ . $\vec{n_2}=(1,1,-1)$ es un vector perpendicular a $\pi_2$ .

Como las coordenadas de $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ no son proporcionales, tienen distinta dirección $\Rightarrow$ $\pi_1$ y $\pi_2$ se cortan en una recta

Como además: $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=-3+2+1=0 \Rightarrow$ los planos son perpendiculares.

b) Un vector direccional de la recta r es: $\vec{u}=(-3,2,-1)$ que coincide con $\vec{n_1}$ . Por tanto: $\vec{u}\perp\vec{n_2} \Rightarrow$ la recta es paralela al plano.

Un punto de la recta es $P(2,1,4)$ por lo que:

$$d(r,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\left|\frac{3+2\cdot2+2\cdot1-2\cdot4}{\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{12}}\right|=\frac{\sqrt{12}}{12}=\frac{2\sqrt{3}}{12}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

**Opción B**

a) *(1 punto)* Obtener los valores de $\alpha$ y $\beta$ para los cuales el vector de componentes $(\alpha,\beta,0)$ tiene módulo $\sqrt{2}$ y es perpendicular a la recta $r\equiv\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=-1\end{cases}$ .

b) *(0,75 puntos)* Estudiar si los vectores $\vec{a}=(3,1,2)$, $\vec{b}=(0,1,1)$, $\vec{c}=(0,1,-1)$ son linealmente independientes.

c) *(0,75 puntos)* Calcular el ángulo que forman dos rectas cuyos vectores direccionales son $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente.

**SOLUCIÓN**

a) $\left|(\alpha,\beta,0)\right| = \sqrt{2} \iff \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{2} \iff \alpha^2+\beta^2 = 2 \quad (*)$

Vector direccional de la recta: $\vec{u} = (-1,-1,0) \,//\, (1,1,0)$.

$(\alpha,\beta,0) \perp \vec{u} \Rightarrow (\alpha,\beta,0)\cdot(1,1,0) = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = 0 \quad (*)$

De las igualdades (*): $\alpha = -\beta \Rightarrow (-\beta)^2+\beta^2 = 2 \Rightarrow 2\beta^2 = 2 \Rightarrow \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \mp 1$

Por tanto: $\boxed{\alpha = -1\ ,\ \beta = 1}$ o $\boxed{\alpha = 1\ ,\ \beta = -1}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-3 = -6 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes

c) $\cos\gamma = \left|\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}\right| = \left|\dfrac{1-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right| = 0 \Rightarrow \gamma = 90^{\circ}$ es decir, las rectas son perpendiculares.

## 3. ANÁLISIS

### Opción A

**1.** Sea $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

(a) *(1 punto)* Calcular el máximo y el mínimo absolutos de $f(x)$.

(b) *(0,5 puntos)* Estudiar si $f(x)$ es una función simétrica respecto al eje OY.

(c) *(1 punto)* Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$.

### SOLUCIÓN.

(a) Se trata de una función continua $\forall x$ por lo que su máximo y su mínimo absolutos lo tendrán en alguno de sus máximos o mínimos relativos o cuando $x \to \pm\infty$.

Estudiemos, en primer lugar las tendencias de la función: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} = 1$

Estudiemos ahora los máximos y mínimos relativos y el valor de la función en ellos:

$$f'(x) = \frac{2(2x-1)\cdot 2\cdot(4x^2+1)-(2x-1)^2\cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{4(2x-1)\left[4x^2+1-(2x-1)\cdot 2x\right]}{(4x^2+1)^2} = \frac{4(2x-1)\left(\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}+2x\right)}{(4x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{(Puntos críticos)}$$

$$f''(x) = \frac{\left[4\cdot\left[2(2x+1)+2(2x-1)\right]\cdot(4x^2+1)^2\right]-4(2x-1)(2x+1)\,2\,(4x^2+1)\,8x}{(4x^2+1)^4} \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0 \\ f''\left(-\dfrac{1}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Luego en $x=\frac{1}{2}$ la función tiene un mínimo relativo de valor $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ y en $x=-\frac{1}{2}$ tiene un máximo relativo de valor $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$.

Por consiguiente, el máximo absoluto de la función se alcanza en $x=-\frac{1}{2}$ y es igual a 2 y el mínimo absoluto se tiene en $x=\frac{1}{2}$ y es igual a 0.

(b) La función es simétrica respecto a OY si $f(-x)=f(x)$:

$$f(-x)=\frac{[2(-x)-1]^2}{4(-x)^2+1}=\frac{(-2x-1)^2}{4x^2+1}=\frac{(2x+1)^2}{4x^2+1}\neq f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{la función no es simétrica respecto a OY}$$

(c) $$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx=[x]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{8x}{4x^2+1}\,dx=1-\frac{1}{2}\left[\ln\left(4x^2+1\right)\right]_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\ln 5-\ln 1\right)=1-\ln\sqrt{5}=\ln e-\ln\sqrt{5}=\ln\frac{e}{\sqrt{5}}=\boxed{\ln\frac{e\sqrt{5}}{5}}$$

**2.** (a) *(1,5 puntos)* Razonar si para $F(x)=\dfrac{\int_0^{x^2} t^2\,dt}{x^4}$ se satisface que $\lim\limits_{x\to 0} F(x)=\lim\limits_{x\to 0} F'(x)$

(b) *(1 punto)* Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)$

**SOLUCIÓN.**

(a) Calculemos $$F(x)=\frac{\int_0^{x^2} t^2\,dt}{x^4}=\frac{\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{x^2}}{x^4}=\frac{\frac{1}{3}x^6}{x^4}=\frac{1}{3}x^2 \quad\Rightarrow\quad F'(x)=\frac{2}{3}x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}x^2\right)=0\\[2mm] \lim\limits_{x\to 0}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}x\right)=0\end{array}\right|\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}F'(x)$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}\right)}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}+3x-2}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x+2x}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

**Opción B**

**1.** Sea $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

(a) *(1,75 puntos)* Estudiar su dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.

(b) *(0,75 puntos)* Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x^2 f(x+1) - f(x)\right]$

**SOLUCIÓN.**

(a) X Por tratarse de una función racional: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

X Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$:

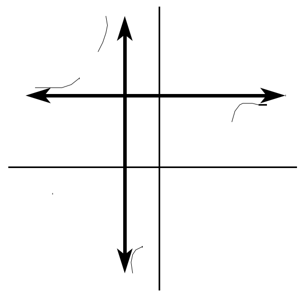
$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{2x} + 2 - \cancel{2x}}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \ \ \forall x \quad \Rightarrow \quad \text{La función es creciente en todo su dominio}$$

X Asíntotas verticales: $x = -1$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2x}{x+1} = \infty$ .

Además: $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{2x}{x+1} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2x}{x+1} = -\infty$

X Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2$ es una asíntota horizontal de la función.

Se tiene:



(b) $$\lim_{x\to+\infty} \left[x^2 f(x+1) - f(x)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[x^2 \cdot \frac{2(x+1)}{x+1+1} - \frac{2x}{x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x^3 + 2x^2}{x+2} - \frac{2x}{x+1}\right] = \infty - 2 = \infty$$

**2.** *(2,5 puntos)* Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que, dada la estructura de la empresa, sólo puede optar por alarmas de dos tipos, A ó B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas del tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. Estudiar cuántas alarmas de cada tipo deben instalar en la empresa para maximizar la seguridad.

**SOLUCIÓN.**

Sean $x$ el número de alarmas del tipo B y $9 - x$ el número de alarmas del tipo A que conviene instalar.

La función "seguridad" es: $S(x) = \dfrac{1}{10}(9-x)\,x^2 = \dfrac{1}{10}\left(9x^2 - x^3\right)$. Veamos para qué valor de x alcanza su máximo:

$$S'(x) = \frac{1}{10}\left(18x - 3x^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(18 - 3x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$S''(x) = \frac{1}{10}(18 - 6x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S''(0) > 0 \ \Rightarrow \ \text{la seguridad es mínima} \\ S''(6) < 0 \ \Rightarrow \ \text{la seguridad es máxima} \end{cases}$$

Por lo tanto, deben instalarse 3 alarmas del tipo A y 6 del tipo B.