Septiembre 2007.

OPCIÓN A

1. *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que $\det\left(A^2\right)=\left(\det(A)\right)^2$ [0,5 puntos]

b) Estudiar si para cualquier matriz $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *de orden 2 se cumple que* $\det\left(M^2\right)=\left(\det(M)\right)^2$ [1 punto]

c) Encontrar la relación entre los elementos de las matrices M *cuadradas de orden 2 que satisfacen:*
$\det(M+I)=\det(M)+\det(I)$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A^2\right)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$

Por otra parte: $\det(A)=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}=-9+8=-1 \Rightarrow \left(\det(A)\right)^2=(-1)^2=1$

Luego, en efecto: $\det\left(A^2\right)=\left(\det(A)\right)^2$

b) $M^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(M^2\right)=\begin{vmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{vmatrix}=$

$=\left(a^2+bc\right)\cdot\left(bc+d^2\right)-(ab+bd)\cdot(ac+dc)=a^2bc+a^2d^2+b^2c^2+bcd^2-a^2bc-abcd-abcd-bcd^2=$

$=a^2d^2+b^2c^2-2abcd=(ad-bc)^2$

$\det(M)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc \Rightarrow \left(\det(M)\right)^2=(ad-bc)^2$ luego en efecto: $\det\left(M^2\right)=\left(\det(M)\right)^2 \quad \forall\, M$

c) $M+I=\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M+I)=(a+1)\cdot(d+1)-bc=ad+a+d+1-bc$ (*)

$\left.\begin{array}{r} \det(M)=ad-bc \\ \det(I)=1 \end{array}\right| \Rightarrow \det(M)+\det(I)=ad-bc+1$ (*)

Como las igualdades (*) han de ser iguales: $ad+a+d+1-bc=ad-bc+1 \Rightarrow a+d=0 \Rightarrow d=-a$

luego las matrices M que satisfacen la relación fijada son de la forma: $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

2. *Sea* $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si } x<0 \\ x^2+2a\cos(x) & \text{si } 0\le x<\pi \\ ax^2+b & \text{si } x\ge\pi \end{cases}$

a) Estudiar los valores de a y b para los que la función f(x) es continua para todo valor de x. [1 punto]

b) Determinar la derivada de f(x) en el intervalo $(0,\pi)$ [0,5 puntos]

c) Calcular $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) La función debe ser continua en $x=0$ y en $x=\pi$ y para ello, deben ser:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \pi^-} f(x)=\lim_{x\to \pi^+} f(x)$$

X $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0}\left(3x+2\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 + 2a\cos(x)\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 1$

X $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to \pi}\left(x^2 + 2a\cos(x)\right) = \lim\limits_{x\to \pi}\left(ax^2 + b\right) \quad \Leftrightarrow \quad \pi^2 - 2 = \pi^2 + b \quad \Rightarrow \quad b = -2$

b) En $(0\,,\pi)$: $\quad f(x) = x^2 + 2\cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 2\,\text{sen}(x)$

c) $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi}\left(x^2 + 2\cos x\right)dx + \int_{\pi}^{2\pi}\left(x^2 - 2\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2\,\text{sen}\,x\right]_0^{\pi} + \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{\pi}^{2\pi} =$

$$= \left(\frac{\pi^3}{3} - 0\right) + \left(\frac{8\pi^3}{3} - 4\pi - \frac{\pi^3}{3} + 2\pi\right) = \frac{\pi^3}{3} + \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi - \frac{\pi^3}{3} + 2\pi = \frac{8\pi^3}{3} - 2\pi$$

3. *Calcular un polinomio de tercer grado* $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *que satisface:*

i) $p(0) = 1$

ii) Tiene un máximo relativo en $x = 1$ *y un punto de inflexión en* $x = 0$

iii) $\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{9}{4}$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X Si $p(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 1$

X $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad p''(x) = 6ax + 2b$

Como en $x = 1$ hay un máximo relativo: $\quad p'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + 2b + c = 0 \quad (*)$

Como en $x = 0$ hay un punto de inflexión: $\quad p''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$ y sustituyendo en (*): $\quad c = -3a$

X $\int_0^1 \left(ax^3 - 3ax + 1\right)dx = \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} + 1 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad a - 6a + 4 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = -1 \quad \Rightarrow \quad c = 3$

Por tanto: $\quad p(x) = -x^3 + 3x + 1$

4. *Dadas las rectas* $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$, $\quad s \equiv x = y + 4 = 2z - 8$

a) Comprobar que se cortan. [1,5 puntos]

b) Hallar el ángulo que forman. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Obtendremos un vector $\overline{u}$ direccional de r y un vector $\overline{v}$ direccional de s que deben ser linealmente independientes (sus coordenadas no deben ser proporcionales). Asimismo, un vector $\overrightarrow{AB}$ cuyo origen sea un punto de r y cuyo extremo sea un punto de s que deberá ser linealmente dependiente de $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

X Dos puntos de r son: $\begin{cases} z = 4: \quad x = 0 \;,\; y = -4 \quad \Rightarrow \quad A(0\,,-4\,,4) \\ z = 0: \quad x = -4 \;,\; y = 4 \quad \Rightarrow \quad P(-4\,,4\,,0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = (-4\,,8\,,-4) \quad \approx \quad \overline{u} = (1\,,-2\,,1)$

X La ecuación de s viene dada en forma continua: $\frac{x-0}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-4}{1/2}$ por lo que un punto es $B(0\,,-4\,,4)$ y un vector direccional $\overline{v} = (2\,,2\,,1)$

Puesto que las coordenadas de $\overline{u}$ y $\overline{v}$ no son proporcionales, los vectores no tienen la misma dirección $\Rightarrow$ las rectas se cortan o se cruzan. Como además tienen un punto común: $A \equiv B$, las rectas se cortan.

b) El ángulo que forman las rectas es el ángulo agudo que forman sus vectores direccionales. Se tiene:

$$\cos\alpha = \left| \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\,|\bar{v}|} \right| = \left| \frac{2-4+1}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+4+1}} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{6}\cdot 3} \right| = \frac{1}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{18} \;\Rightarrow\; \alpha = \text{arc cos}\,\frac{\sqrt{6}}{18}\;;\; 82^{\circ}\,10'\,44''$$

OPCIÓN B

1. *Sean* $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudiar para qué valores de α *y* β *la matriz A tiene inversa.* [0,5 puntos]
b) Calcular A^5. [1 punto]
c) Hallar la matriz inversa de B. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Puesto que $|A| = 0 \quad \forall\, \alpha, \beta$ por tener una columna nula $\Rightarrow$ A no tiene inversa

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

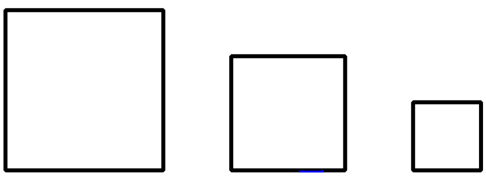
y, por lo tanto, A^5 es la matriz nula.

c) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \;\Rightarrow\; \exists\, B^{-1}$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ t & k & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj}\left(B^t\right) = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \frac{\text{Adj}\left(B^t\right)}{|B|} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Obtener las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que:*
i) El perímetro del primero de ellos es el triple del perímetro del tercero.
ii) Se necesitan exactamente 1664 metros de valla para vallar los tres campos.
iii) La suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



x **y** **z**

Sean x, y, z los lados de los tres campos.

Por i): $4x = 12z \;\Rightarrow\; x = 3z$
Por ii): $4x + 4y + 4z = 1664 \;\Rightarrow\; x + y + z = 416 \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; y + 4z = 416 \;\Rightarrow\; y = 416 - 4z$
Por iii): $f\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ debe ser mínima $\Leftrightarrow$

$$f\,(z) = 9z^2 + \left(416-4z\right)^2 + z^2 = 9z^2 + 416^2 + 16z^2 - 3328z + z^2 = 26z^2 - 3328z + 416^2 \longrightarrow \text{mínima}$$

$f'(z) = 52z - 3328 = 0 \;\Rightarrow\; z = \dfrac{3328}{52} = 64$ y como $f''(z) = 52 > 0$, el valor $z = 64$ hace mínima la función.

Por tanto, las dimensiones de los tres campos son: $x = 192$ m , $y = 160$ m , $z = 64$ m

3. *a) Utilizando el cambio de variable* $t = \ln x$ *calcular* $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\left(4-\ln x\right)}$ [1,5 puntos]

b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(5x)}{\left(x-x^2\right)^2}$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $t = \ln x \;\Rightarrow\; dt = \dfrac{dx}{x}$. Además: si $x = e \;\Rightarrow\; t = \ln e = 1$ y si $x = e^2 \;\Rightarrow\; t = \ln e^2 = 2$

Se tiene: $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\left(4-\ln x\right)} = \int_1^2 \frac{dt}{4-t} = \Big[-\ln(4-t)\Big]_1^2 = -\ln 2 + \ln 3 = \ln\frac{3}{2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(5x)}{\left(x-x^2\right)^2} = \frac{0}{0} =$ aplicando la regla de L'Hôpital:

$\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(4x)\cdot\operatorname{sen}(5x) + 5\operatorname{sen}(4x)\cdot\cos(5x)}{2\left(x-x^2\right)\left(1-2x\right)} = \frac{0}{0} =$ y aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-16\operatorname{sen}(4x)\cdot\operatorname{sen}(5x) + 20\cos(4x)\cdot\cos(5x) + 20\cos(4x)\cdot\cos(5x) - 25\operatorname{sen}(4x)\cdot\operatorname{sen}(5x)}{2\left(1-2x\right)^2 - 4\left(x-x^2\right)} = \frac{20+20}{2} = 20$$

4. *Se consideran la recta* $r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$ *y el punto* $P\left(1,2,3\right)$.

a) Calcular la ecuación del plano π *que es perpendicular a la recta r y contiene al punto P.* [1,5 puntos]

b) Estudiar para qué valores de k los vectores $\left\{\left(1,-2,-1/2\right),\left(0,k,0\right),\left(0,0,2k\right)\right\}$ *son linealmente independientes* [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Un vector direccional de r será perpendicular al plano y sus coordenadas serán los coeficientes A, B y C de la ecuación general del plano. Obtengamos entonces dos puntos de la recta y con ellos un vector direccional de la misma:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{para } y=2:\quad x=3\ ,\ z=1 \;\Rightarrow\; A\left(3,2,1\right) \\ \text{para } y=0:\quad x=7\ ,\ z=2 \;\Rightarrow\; B\left(7,0,2\right) \end{array}\right| \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(4,-2,1\right)$$

La ecuación del plano π es entonces: $4x-2y+z+D=0$ y como contiene al punto P: $4-4+3+D=0 \;\Rightarrow\; D=-3$ y por tanto: $\pi \equiv 4x-2y+z-3=0$

b) Para que los vectores sean linealmente independientes: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1/2 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{vmatrix} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; 2k^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; k \neq 0$ es decir, los vectores son linealmente independientes $\forall\, k \neq 0$.