Junio 2006.

OPCIÓN A

1. *Se consideran las matrices* $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ *donde* λ *es un número real.*

a) Encontrar los valores de λ *para los que la matriz AB tiene inversa.* [1,5 puntos]

b) Dados a y b números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ *compatible determinado con A la matriz del enunciado?.* [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{pmatrix}$.

$A\cdot B$ tiene inversa cuando $|A\cdot B|\neq 0$: $\begin{vmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}=1+2\lambda-3-2\lambda+3\lambda+2\lambda^2=2\lambda^2+3\lambda-2=0 \Rightarrow$

$\lambda=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$, $\lambda=-2$. Luego la matriz $A\cdot B$ tiene inversa para $\lambda\neq\frac{1}{2}$ y -2

b) No puede serlo. La matriz A tiene un rango máximo de 2 y el número de incógnitas es de 3.

2. *Calcular los valores de a y b para que la función* $f(x)=\frac{bx}{x-a}$ *tenga como asíntota vertical la recta* $x=2$ *y como asíntota horizontal la recta* $y=3$. *Razonar si para* $a=2$ *y* $b=3$ *la función* $f(x)$ *tiene algún mínimo relativo.*

[2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X Para que $x=2$ sea una asíntota vertical de la función, debe ser $a=2$ pues $\lim\limits_{x\to 2}\frac{bx}{x-2}=\infty$

Para que $y=3$ sea una asíntota horizontal debe ser $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$ y eso ocurre cuando $b=3$ pues $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}=3$

X $f(x)=\frac{3x}{x-2} \Rightarrow f'(x)=\frac{3(x-2)-3x}{(x-2)^2}=\frac{-6}{(x-2)^2}\neq 0\ \forall x \Rightarrow$ La función no tiene extremos relativos.

3. *a) Utilizando el cambio de variable* $t = e^x$ *, calcular* $\int e^{x+e^x}\,dx$ [1,5 puntos]

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{7x^2}$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $t = e^x \;\Rightarrow\; dt = e^x\,dx$. Se tiene: $\int e^{x+e^x}\,dx = \int e^x \cdot e^{e^x}\,dx = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{e^x} + C$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{7x^2} = \dfrac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{14x} = \dfrac{1}{0} = \infty$

4. *Calcular la distancia entre las rectas r y s, donde* $r: \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 3 + k \end{cases}$ *y* $s: \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -1 + 3k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$

SOLUCIÓN.

Estudiemos la posición relativa de las dos rectas:

$\bar{u} = (2,\ -1,\ 1)$ es un vector direccional de r y $\bar{v} = (1,\ 3,\ -2)$ un vector direccional de s $\Rightarrow$ las rectas no son paralelas puesto que sus coordenadas no son proporcionales.

$A(2,\ 1,\ 3)$ es un punto de r y $B(-1,\ -1,\ 4)$ un punto de s $\Rightarrow AB = (-3,\ -2,\ 1)$

Veamos si los vectores $\bar{u}, \bar{v}$ y AB son o no linealmente independientes:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 6 + 9 + 1 - 8 = 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes $\Rightarrow$ las rectas están en un mismo plano y, por tanto, se cortan $\Rightarrow$ $d(r,\ s) = 0$

Junio 2006

OPCIÓN B

1. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{pmatrix}$

a) Sin utilizar la regla de Sarrus, calcular el determinante de dicha matriz. [1,5 puntos]
b) Estudiar el rango de A en el caso en que $b = -a$. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a)

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} a \begin{vmatrix} a & ab & ab \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} a^2 \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} a^2 \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a^2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} a^2 \begin{vmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=}$$

$$= a^2 \cdot \left(a^2 - b^2\right)^2$$

Propiedades aplicadas: (1) y (2) sacar factor común a "a" en la primera columna y en la primera fila. (3) $F_2 - b \cdot F_1$, $F_3 - b \cdot F_1$
(4) y (5) Desarrollo por los elementos de la primera columna

b) Para $b = -a$, la matriz A es: $\begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$ y como los tres vectores fila son linealmente dependientes, el rango de la matriz es 1.

2. *La función* $f : [0, \infty) \to /$ *definida por* $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$ *es continua en* $[0, \infty)$.

a) Hallar el valor de a que hace que esta afirmación es cierta. [0,75 puntos]
b) Calcular $\int_0^{10} f(x)\, dx$ [1,75 puntos]

SOLUCIÓN.

a) El único punto de posible discontinuidad está en $x = 8$. Para que la función sea continua en él debe ser:

$$\lim_{x \to 8^-} f(x) = \lim_{x \to 8^+} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 8^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 8} \sqrt{ax} = \sqrt{8a} \\ \lim\limits_{x \to 8^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{8a} = 8 \Rightarrow 8a = 64 \Rightarrow a = 8$$

b) Puesto que hay un cambio de definición de la función en $x = 8$: $\int_0^{10} f(x)\, dx = \int_0^{8} f(x)\, dx + \int_8^{10} f(x)\, dx$

Calculemos las primitivas: $\int \sqrt{8x}\,dx = \sqrt{8}\int x^{1/2}\,dx = \sqrt{8}\cdot\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}$

$$\int \frac{x^2-32}{x-4}\,dx = \int\left(x+4-\frac{16}{x-4}\right)dx = \frac{1}{2}x^2+4x-16\ln\left(x-4\right)\Big)$$

Se tiene: $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 \sqrt{8x}\,dx + \int_8^{10}\frac{x^2-32}{x-4}dx = \left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^8 + \left[\frac{1}{2}x^2+4x-16\ln\left(x-4\right)\right]_8^{10} =$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot 16\sqrt{2}+50+40-16\ln 6-32-32+16\ln 4 = \frac{128}{3}+26+16\ln\frac{4}{6} = \frac{206}{3}+\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$$

3. *Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sean x y $8-x$ los dos sumandos. La función que debe ser mínima es: $f(x) = x^3+(8-x)^2 = x^3+x^2-16x+64$

$f'(x) = 3x^2+2x-16 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+192}}{6} = \dfrac{-2\pm\sqrt{196}}{6} = \dfrac{-2\pm 14}{6} \Rightarrow x = 2\ ,\ x = -\dfrac{8}{3}$

$f''(x) = 6x+2 \Rightarrow f'(2) > 0 \Rightarrow$ para $x = 2$ la función es mínima.

Los dos sumandos son: 2 y 6

4. *a) Estudiar si son linealmente independientes los vectores* $\vec{a} = (3,1,2)$, $\vec{b} = (0,1,1)$ y $\vec{c} = (1,1,1)$. *Expresar el vector* $\vec{v} = (0,0,1)$ *como combinación lineal de* $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. [1,5 puntos]

b) *¿Son el plano* $\pi: 2x+3y+z+1=0$ *y la recta* $r: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{-3} = -z$ *ortogonales?. Justificar la respuesta.*

[1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+1-2-3 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes.

$$(0,\ 0,\ 1) = \alpha_1(3,\ 1,\ 2) + \alpha_2(0,\ 1,\ 1) + \alpha_3(1,\ 1,\ 1) = (3\alpha_1+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1 \end{cases}$$

y resolviendo el sistema: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -3$ es decir: $\overline{v} = \overline{a}+2\overline{b}-3\overline{c}$

b) El plano y la recta serán perpendiculares si el vector normal al plano $\overline{n}$ y el vector direccional de la recta $\overline{u}$ son paralelos (tienen sus coordenadas proporcionales):

Se tiene: $\overline{n} = (2,\ 3,\ 1)$ y $\overline{u} = (-2,\ -3,\ -1)$ y como $\overline{n} = -\overline{u}$, son paralelos y, por tanto, el plano y la recta son perpendiculares.