Junio 2005.

OPCIÓN A

1. *Eva, Marta y Susana son tres jóvenes amigas que se comprometen a leer el Quijote este verano. Cada una por separado y en función del tiempo del que dispone, decide leer un mismo número de páginas cada día hasta terminar la obra. Eva leerá diariamente 5 páginas más que Marta y ésta 6 páginas más que Susana. Por ello Eva terminará la obra dos semanas antes que Marta y ésta 30 días antes que Susana. Se pregunta cuál es el total de páginas que tiene la versión de la inmortal obra cervantina que leen estas amigas.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sea x el total de páginas de la obra e y el número de páginas diarias que lee Eva. El número de páginas diarias que lee Marta es $y-5$ y el de Susana es $y-11$.

$\frac{x}{y}$ es el número de días que tarda Eva en leer la obra completa, $\frac{x}{y-5}$ son los días que tarda Marta y $\frac{x}{y-11}$ los que tarda Susana. Se tiene:

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{x}{y-5}-14 \\ \frac{x}{y}=\frac{x}{y-11}-44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\,(y-5)=xy-14y\,(y-5) \\ x\,(y-11)=xy-44y\,(y-11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-5x=xy-14y^2+70y \\ xy-11x=xy-44y^2+484y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=14y^2-70y \\ 11x=44y^2-484y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{14y^2-70y}{5}=\frac{44y^2-484y}{11} \Rightarrow 154y^2-770y=220y^2-484y \Rightarrow 66y^2-1650y=0 \Rightarrow y\,(66y-1650)=0$$

$\Rightarrow y=0$, $y=\frac{1650}{66}=25$ la solución y = 0 se desecha por absurda y nos queda y = 25, y por tanto: x = 1400

Es decir, la versión elegida de *el Quijote* tiene 1400 páginas.

2. *Sea la función* $f\,(x)=\frac{4x+sen\,2x}{sen\,3x}$. *Determinar el dominio de f* [1 punto] *e indicar si f tiene límite finito en algún punto que no sea del dominio.* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X El dominio es $D\,(f)=\Re-\{x\in\Re\ /\ sen\,3x=0\}$. $sen\,3x=0 \Rightarrow 3x=0+K\pi \Rightarrow x=K\cdot\frac{\pi}{3}$ y por tanto:

$$D\,(f)=\Re-\frac{K\pi}{3} \quad \text{con K = 0 , 1 , 2 , ...}$$

X Para $K=0 \Rightarrow x=0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x+sen\,2x}{sen\,3x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4+2\cos\,2x}{3\cos 3x}=2$

Para los restantes valores de K, el denominador se anula y el numerador no, por lo que la función tiende a infinito.

3. *Calcular los extremos y los puntos de inflexión de la función* $f(x)=e^x\, sen\,x$ *en el intervalo* $[0\,,2\pi]$. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Se tiene: $f'(x)=e^x\, sen\,x+e^x\cos x=e^x\,(sen\,x+\cos x)\ \Rightarrow\ f''(x)=e^x(sen\,x+\cos x)+e^x(\cos x-sen\,x)=2\,e^x\cos x$

X Los extremos relativos anulan la primera derivada: $e^x\,(sen\,x+\cos x)=0\Rightarrow sen\,x+\cos x=0\Rightarrow sen\,x=-\cos x\Rightarrow$
$\Rightarrow\ tag\,x=-1\ \Rightarrow\ x=\dfrac{3\pi}{4}\ ,\ x=\dfrac{7\pi}{4}$.

Comprobemos si se trata de máximos o mínimos:

$f''\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=2\,e^{\frac{3\pi}{4}}\cos\dfrac{3\pi}{4}<0\ \Rightarrow$ se trata de un punto de máximo relativo.

$f''\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)=2\,e^{\frac{7\pi}{4}}\cos\dfrac{7\pi}{4}>0\ \Rightarrow$ se trata de un punto de mínimo relativo

X Los puntos de inflexión anulan la segunda derivada: $2\,e^x\cos x=0\ \Rightarrow\ \cos x=0\ \Rightarrow\ x=\dfrac{\pi}{2}\ ,\ x=\dfrac{3\pi}{2}$

Comprobemos que no anulan la tercera derivada: $f'''(x)=2\left[e^x\cos x-e^x\, sen\,x\right]=2\,e^x\,(\cos x-sen\,x)\ \Rightarrow$

$f'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\,e^{\frac{\pi}{2}}\,(0-1)\neq 0\ \Rightarrow$ la función tiene un punto de inflexión en $x=\dfrac{\pi}{2}$

$f'''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=2\,e^{\frac{3\pi}{2}}\,(0+1)\neq 0\ \Rightarrow$ la función tiene un punto de inflexión en $x=\dfrac{3\pi}{2}$

4. *Escribir la ecuación de la circunferencia con centro* $(2\,,-1)$ *y cuyo radio es 3, y luego determinar los puntos de esta circunferencia que equidistan de los ejes.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Nota: Las cónicas no forman parte de los contenidos para este examen. Este problema ha sido propuesto por error.

La ecuación de la circunferencia es: $(x-2)^2+(y+1)^2=9\ \Leftrightarrow\ x^2+y^2-4x+2y-4=0$

Los puntos que equidistan de los ejes están en las rectas $y=x$ o $y=-x$. Por tanto:

X Cortes con $y=x$: $x^2+x^2-4x+2x-4=0\ \Rightarrow\ 2x^2-2x-4=0\ \Rightarrow\ x^2-x-2=0\ \Rightarrow\ x=-1\ ,\ x=2$
luego los puntos son: $(-1,-1)$ y $(2\,,2)$.

X Cortes con $y=-x$: $x^2+x^2-4x-2x-4=0\ \Rightarrow\ 2x^2-6x-4=0\ \Rightarrow\ x^2-3x-2=0\ \Rightarrow\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

luego los puntos son: $\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2},\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$

Junio 2005.

OPCIÓN B

1. *La terna* $(0\,,0\,,0)$ *es siempre solución del sistema* $\begin{cases} x+2y-az=0 \\ ax-y+z=0 \\ 2ax+y-z=0 \end{cases}$ *independientemente del valor del parámetro a.*

a) Indicar para qué valores del parámetro la citada terna es la única solución del sistema. [1,5 puntos]
b) Indicar algún valor del parámetro, si existe, para el cual el sistema tenga algunas soluciones distintas de la nula y mostrar estas soluciones. (Nota: si se encuentran varios valores del parámetro cumpliendo la condición pedida, para responder a esta cuestión basta tomar uno solo de ellos). [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes.

El sistema tiene una solución única (la solución trivial) cuando $rg\ A=3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{vmatrix}=1-a^2+4a-2a^2+2a-1=-3a^2+6a=0 \Rightarrow 3a\left(-a+2\right)=0 \Rightarrow a=0\ ,\ a=2$$ es decir, cuando $a\neq 0$ y $a\neq 2$ el rango de A es 3 y por tanto el sistema tiene como única solución $x=y=z=0$

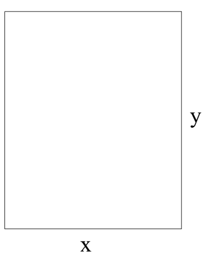
b) Para que el sistema tenga otras soluciones (compatible indeterminado) debe ser $rg\ A<3$ y esto ocurre cuando $a=0$ y $a=2$:

X Para a = 0: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}$

X Para a = 2: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}$

2. *Queremos construir un marco rectangular que encierre una superficie de un metro cuadrado. Sabemos que el coste de cada centímetro en los lados horizontales es de 2 euros, mientras que en los lados verticales es de 8 euros. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo más barato posible.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Se tiene: $x\cdot y=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{x}$

La función que debe ser mínima es la función "Precio" :

$$P=2x\cdot 200+2y\cdot 800=400x+1600y \Leftrightarrow P=400x+\frac{1600}{x}$$

$$P'=400-\frac{1600}{x^2}=0 \Rightarrow 400x^2-1600=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2 \quad \text{(valor crítico)}$$

Comprobemos que el valor crítico obtenido minimiza la función:

$P''=\dfrac{3200x}{x^4} \Rightarrow P''(2)>0 \Rightarrow$ x = 2 minimiza la función "Precio". Por tanto, las dimensiones del marco más barato es de 2 metros de ancho y 0,5 metros de alto.

3. *Sea la función $f(x)=x\ sen\,2x$. Calcular la integral de esta función entre x = 0 y su primer cero positivo. (Nota: Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula).* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Obtengamos los ceros de la función: $x\cdot sen\,2x=0 \Rightarrow x=0\ ,\ sen\,2x=0 \Rightarrow 2x=\pi \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$

$$\int x\cdot sen\,2x\cdot dx=(1)\ \left\{ \mathrm{u}=x \Rightarrow \mathrm{du}=\mathrm{dx}\ ;\ \mathrm{dv}=\mathrm{sen}\ 2\mathrm{x}\cdot\mathrm{dx} \Rightarrow \mathrm{v}=-\frac{1}{2}\cos 2x \right\}\ (1)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\cdot dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}sen\,2x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot sen\,2x\cdot dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}sen\,2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

4. *Sea el plano $\pi: 2x-3y+z=1$ y el punto $A=(5,-5,4)$.*
a) Determinar el punto simétrico de A respecto de π. [1,5 puntos]
b) Volumen de la figura del espacio limitada por el plano π y los tres planos cartesianos. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) X Obtengamos la ecuación de la recta *r* perpendicular al plano π que pasa por A:
El vector $\overline{u}=(2,-3,1)$ es normal al plano y, por tanto, es un vector direccional de la recta. Las ecuaciones paramétricas de la recta son: $r\equiv\begin{cases} x=5+2t \\ y=-5-3t \\ z=4+t \end{cases}$

X Obtengamos ahora las coordenadas del punto M, intersección de π y *r*:

$$2\cdot(5+2t)-3\cdot(-5-3t)+4+t=1 \Rightarrow 10+4t+15+9t+4+t=1 \Rightarrow 14t=-28 \Rightarrow t=-2$$

luego el punto M es el de coordenadas: $M\,(1,1,2)$

X El punto M es el punto medio del segmento AA' donde A' es el punto simétrico de A respecto a π:

$1=\dfrac{5+x}{2} \Rightarrow x=-3\ ;\ 1=\dfrac{-5+y}{2} \Rightarrow y=7\ ;\ 2=\dfrac{4+z}{2} \Rightarrow z=0$ es decir, el punto simétrico de A es $(-3,7,0)$.

b) El tetraedro tiene por vértices el origen de coordenadas O y los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados:

con OX: $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow X\left(\dfrac{1}{2},0,0\right) \Rightarrow \overline{OX}=\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$

con OY: $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow Y\left(0,-\dfrac{1}{3},0\right) \Rightarrow \overline{OY}=\left(0,-\dfrac{1}{3},0\right)$

con OZ: $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Z}(0,0,1) \Rightarrow \overline{\mathrm{OZ}}=(0,0,1)$

Por tanto: $V=\left|\,\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\,\right|=\left|\,\dfrac{1}{6}\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)\right|=\dfrac{1}{36}u^3$