Septiembre 2004

OPCIÓN A

1. *Sea el sistema homogéneo de ecuaciones* $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ ax-y+z=0 \\ x+2ay-z=0 \end{cases}$

a) Determinar el valor o valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la nula [1,5 puntos]
b) Resolver el sistema para el valor o valores de a hallados en el apartado anterior [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Para que el sistema tenga soluciones distintas de la nula el rango de la matriz de los coeficientes debe ser menor que tres, y para ello el único menor de orden tres debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 2a & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1+1-4a^2-2+a-2a=0 \Leftrightarrow -4a^2-a=0 \Leftrightarrow a\cdot(-4a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

b) X Para $a=0$, la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2. Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ las dos ecuaciones primeras son independientes respecto a las incógnitas x e y. Utilizando $z=\mu$ como parámetro, el sistema es:

$$\begin{cases} x+y=2\mu \\ -y=-\mu \end{cases} \Rightarrow y=\mu \ , \ x=\mu \ , \ z=\mu$$

X Para $a=-\frac{1}{4}$, la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{4} & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ las dos primeras ecuaciones son independientes respecto a x e y. Utilizando $z=\lambda$ como parámetro, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x+y=2\lambda \\ -\frac{1}{4}x-y=-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2\lambda \\ x+4y=4\lambda \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 4\lambda & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{8\lambda-4\lambda}{4-1}=\frac{4\lambda}{3} \ ; \ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda \\ 1 & 4\lambda \end{vmatrix}}{3}=\frac{4\lambda-2\lambda}{3}=\frac{2\lambda}{3} \ ; \ z=\lambda$$

2. *Descomponer el número e en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima* [1,5 puntos]. *Calcular dicha suma* [1 punto]

SOLUCIÓN.

Sean x e y los dos sumandos positivos: $e=x+y \Rightarrow y=e-x$

La función que debe ser máxima es: $S=\ln x+\ln(e-x)$. Veamos para que valor de x se maximiza la función:

$$S'=\frac{1}{x}-\frac{1}{e-x}=\frac{e-x-x}{x\cdot(e-x)}=\frac{e-2x}{ex-x^2}=0 \Rightarrow e-2x=0 \Rightarrow x=\frac{e}{2}$$

$$S''=\frac{-2\cdot\left(ex-x^2\right)-\left(e-2x\right)\cdot\left(e-2x\right)}{ex-x^2}=\frac{-2\cdot\left(ex-x^2\right)-\left(e-2x\right)^2}{ex-x^2}\ \Rightarrow\ f''\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{-2\cdot\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}\right)-\left(e-e\right)^2}{\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}}=-2<0$$

luego para $x=\frac{e}{2}$, $y=\frac{e}{2}$ la suma de los logaritmos neperianos es máxima.

La suma es: $S=\ln\ \frac{e}{2}+\ln\ \frac{e}{2}=2\cdot\ln\ \frac{e}{2}=2\cdot\left(\ln e-\ln 2\right)=2\cdot\left(1-\ln 2\right)=2-\ln 4$

3. *Calcular el área encerrada entre las gráficas de la recta* $y=x+2$ *y la parábola* $y=x^2$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Consideremos la función diferencia de las dos funciones dadas: $d(x)=x+2-x^2$. El área pedida es el área del recinto limitado por esta función diferencia y el eje de abscisas.

Los puntos de corte de d(x) y OX son: $-x^2+x+2=0\ \Rightarrow\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{-1\pm 3}{-2}=\begin{cases}-1\\ 2\end{cases}$

Entonces: $A=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=-3+8-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\ u^2$

4. *La recta* $x=\frac{1-y}{3}=\frac{2-z}{2}$ *corta a los tres planos coordenados en tres puntos.*
Determinar las coordenadas de estos puntos [0,5 puntos], las distancias existentes entre cada par de ellos [1 punto] *e indicar cuál es el que se encuentra en medio de los otros dos* [1 punto].

SOLUCIÓN.

Escribamos la recta como intersección de dos planos: $x=\frac{1-y}{3}=\frac{2-z}{2}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}3x=1-y\\ 2x=2-z\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}3x+y-1=0\\ 2x+z-2=0\end{cases}$

a) Puntos de corte con los planos coordenados:

X Punto de corte con $x=0$: $\begin{cases}3x+y-1=0\\ 2x+z-2=0\\ x=0\end{cases}\ \Rightarrow\ x=0\ ,\ y=1\ ,\ z=2\ \Rightarrow\ A\left(0,\ 1,\ 2\right)$

X Punto de corte con $y=0$: $\begin{cases}3x+y-1=0\\ 2x+z-2=0\\ y=0\end{cases}\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{3}\ ,\ y=0\ ,\ z=\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ B\left(\frac{1}{3}\ ,\ 0,\ \frac{4}{3}\right)$

X Punto de corte con $z=0$: $\begin{cases}3x+y-1=0\\ 2x+z-2=0\\ z=0\end{cases}\ \Rightarrow\ x=1\ ,\ y=-2\ ,\ z=0\ \Rightarrow\ C\left(1,\ -2,\ 0\right)$

b) Distancias entre los puntos:

X $d\left(A,\ B\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(0-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+1+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}$

X $d(A,\ C) = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

X $d(B,\ C) = \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + (-2-0)^2 + \left(0-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+4+\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{56}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$

Puesto que $\frac{2\sqrt{14}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3} = \sqrt{14} \Rightarrow d(A,\ B) + d(B,\ C) = d(A,\ C) \Rightarrow$ el punto B se encuentra entre A y C.

Septiembre 2004

OPCIÓN B

1. *Determinar una matriz cuadrada X que verifique* $AX + XA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ *siendo* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [2 puntos]. *Luego analizar si la matriz X es inversible, y en el caso de serlo calcular su matriz inversa* [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+b & 2b \\ a+2c+d & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=2 \\ 2b=-2 \\ a+2c+d=3 \\ b+2d=3 \end{cases} \Rightarrow b=-1\ ,\ a=\frac{3}{2}\ ,\ d=2\ ,\ c=-\frac{1}{4}$$

es decir: $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$

X La matriz X es inversible pues: $|X| = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \neq 0$. Calculemos X^{-1}:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{Adj}(X^t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow X^{-1} = \frac{\operatorname{Adj}(X^t)}{|X|} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

2. *Sea el polinomio* $x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) Determinar los coeficientes a, b y c sabiendo que tiene extremos en $x=-1$ *y en* $x=1$ *y que pasa por el origen de coordenadas* [1,5 puntos]

b) Estudiar la naturaleza de ambos extremos [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$x=-1$ extremo relativo $\Rightarrow$ $f'(-1)=0$ $\Rightarrow$ $3-2a+b=0$ (*)
$x=1$ extremo relativo $\Rightarrow$ $f'(1)=0$ $\Rightarrow$ $3+2a+b=0$ (*)

Sumando las igualdades (*): $6+2b=0 \Rightarrow b=-3 \Rightarrow a=0$

Y como la función pasa por el origen de coordenadas: $f(0)=0 \Rightarrow c=0$

Por tanto, el polinomio es x^3-3x

b) La naturaleza de los extremos (máximo o mínimo) depende del signo de la segunda derivada: $f''(x)=6x$

$f''(-1)=-6<0$ $\Rightarrow$ en $x=-1$ la función tiene un máximo relativo
$f''(1)=6>0$ $\Rightarrow$ en $x=1$ la función tiene un mínimo relativo.

3. *Sea la parábola* $f(x)=x^2-6x+9$.

a) Probar que es tangente a uno de los ejes coordenados, indicando a cual [1 punto].
b) Calcular el área encerrada entre la gráfica de la parábola y los dos ejes coordenados [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Sólo puede serlo el eje OX. Probémoslo:

$f'(x)=2x-6=0 \Rightarrow x=3$
$f''(x)=2>0 \Rightarrow$ en $x=3$ la parábola tiene un mínimo (el vértice).
Además: $f(3)=9-18+9=0$ $\Rightarrow$ el punto $(3,\ 0)$ es un mínimo y pertenece al eje OX $\Rightarrow$ OX es tangente a la parábola en el punto $(3,\ 0)$

b) $A=\int_0^3 \left(x^2-6x+9\right)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_0^3=(9-27+27)-0=9\ u^2$

4. *Sea r la recta que pasa por los puntos* $(1,\ 2,\ 3)$ y $(-1,\ 0,\ 2)$.
a) Determinar las ecuaciones de los planos π *y* σ *que son perpendiculares a la recta r y que pasan respectivamente por los puntos* $(4,\ -2,\ -1)$ y $(2,\ -1,\ -3)$ [1,5 puntos]
b) Calcular la distancia que hay entre ambos planos π *y* σ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Un vector direccional de r es $\bar{u}=(2,\ 2,\ 1)$ y un plano perpendicular a r tendrá por ecuación: $2x+2y+z+D=0$

Como π pasa por $(4,\ -2,\ -1)$: $8-4-1+D=0 \Rightarrow D=-3$ y por tanto: $\pi \equiv 2x+2y+z-3=0$

Como σ pasa por $(2,\ -1,\ -3)$: $4-2-3+D=0 \Rightarrow D=1$ y por tanto: $\sigma \equiv 2x+2y+z+1=0$

b) Los planos π y σ son paralelos. La distancia entre ambos es:

$$d=\left|\frac{D-D'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{-3-1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}\right|=\frac{4}{3}$$