Junio 2003

OPCIÓN A

1. *Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad. Calcular lo que tiene cada uno de ellos sabiendo que entre los tres reunen 60 euros.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Sea x el dinero que tiene Luis, y el que tiene Juan y z el de Óscar. Escribimos un sistema de ecuaciones con las condiciones que indica el enunciado y lo resolveremos por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ x-\dfrac{x}{3}=y+\dfrac{x}{3} \\ x-\dfrac{x}{3}=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ x-3y=0 \\ 2x-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ -4y-z=-60 \\ -2y-5z=-120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ 4y+z=60 \\ 9z=180 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=30 \\ y=10 \\ z=20 \end{matrix}$$

Es decir, Luis tiene 30 euros, Juan 10 euros y Óscar 20 euros.

2. *Determinar un polinomio de tercer grado sabiendo que pasa por los puntos* $(0,0)$ *y* $(-1,1)$ *y que los dos son extremos* [1,5 puntos]*, y analizar la naturaleza de ambos extremos, es decir si son máximos o mínimos* [1 punto].

SOLUCIÓN.

Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ la función polinómica de tercer grado. Se trata de calcular sus coeficientes.

Se tiene: $f(0)=0 \Rightarrow d=0$ (*) , $f(-1)=1 \Rightarrow -a+b-c+d=1$ (*)

Además: $f'(0)=0$ y $f'(-1)=0$ por tratarse de extremos relativos. Como $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, se tiene:
$f'(0)=0 \Rightarrow c=0$ (*) , $f'(-1)=0 \Rightarrow 3a-2b+c=0$ (*)

De las igualdades (*), se sigue: $c=d=0$, $\begin{cases} -a+b=1 \\ 3a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2b=2 \\ 3a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow a=2$, $b=3$

Por tanto, el polinomio pedido es: $f(x)=2x^3+3x^2$

X Estudiemos la naturaleza de los extremos relativos: $f'(x)=6x^2+6x \Rightarrow f''(x)=12x+6$
$f''(0)=6>0 \Rightarrow$ el punto $(0,0)$ es un mínimo. $f''(-1)=-6<0 \Rightarrow$ el punto $(-1,1)$ es un máximo.

3. *Sean las parábolas* $y=x^2-4x+13$ *e* $y=2x^2-8x+16$.

a) Representar sus gráficas [0,5 puntos]
b) Calcular los puntos donde se cortan entre sí ambas parábolas [0,5 puntos]
c) Hallar la superficie encerrada entre las dos parábolas [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

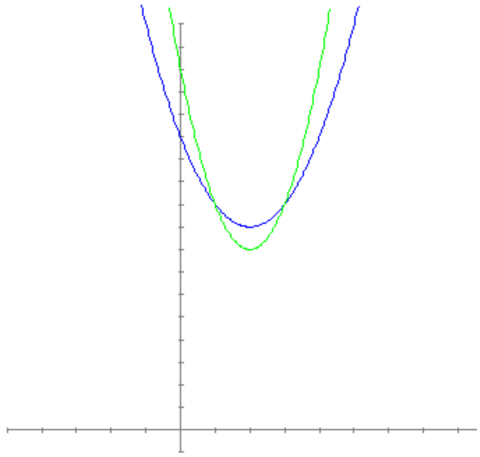
a) Obtengamos sus vértices (puntos de máximo o mínimo):

- $y'=2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow V(2,9)$. Como además $y''=2>0 \Rightarrow$ se trata de un mínimo.
  Otros puntos de la gráfica son: (0 , 13) , (1 , 10) , (3 , 10) , (4 , 13)

- $y' = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow V'(2,8)$. Como además $y'' = 4 > 0 \Rightarrow$ se trata de un mínimo.

  Otros puntos de la gráfica son: (0 , 16) , (1 , 10) , (3 , 10) , (4 , 16).

  Las gráficas son:



b) Los puntos comunes de ambas parábolas tienen iguales sus ordenadas, luego:

$$x^2 - 4x + 13 = 2x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x = 1 \ , \ x = 3$$

Por tanto, los puntos son: (1 , 10) y (3 , 10)

c) La superficie es: $\int_1^3 \left[\left(2x^2 - 8x + 16\right) - \left(x^2 - 4x + 13\right)\right] dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_1^3 = -\frac{4}{3}$

luego: $S = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}\ \text{u}^2$

4. *Sean los puntos* $A(3,2)$ *y* $B(5,3)$. *Calcular*

a) Ecuación general de la circunferencia que pasa por el punto B y tiene su centro en A [1 punto]

b) Ecuación de la tangente a esta circunferencia en B [1 punto]

c) Área del triángulo formado por la tangente anterior y los ejes coordenados [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) El radio es: $r = d(A, B) = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$ y, por tanto, la ecuación general de la circunferencia es:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$$

b) La tangente es la recta perpendicular al radio AB que pasa por el punto B:

$\overline{AB} = (2,1) \Rightarrow$ la pendiente de la recta AB es $m = \frac{1}{2} \Rightarrow$ la pendiente de la tangente es -2. Como además pasa por el punto B, su ecuación es: $y - 3 = -2 \cdot (x-5) \Leftrightarrow y - 3 = -2x + 10 \Leftrightarrow 2x + y - 13 = 0$

c) Se trata de un triángulo rectángulo de base la abscisa del punto de corte de la recta con el eje OX y altura la ordenada del punto de corte con OY:

Corte con OX: $\begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{13}{2}$ Corte con OY: $\begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 13$

Por tanto: $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot 13 = \frac{169}{4}\ \text{u}^2$

Junio 2003.

OPCIÓN B

1. *Buscar una matriz cuadrada X (pueden existir varias) cuyo primer elemento valga 2 y tal que la siguiente suma*

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$$

sea la matriz nula [2,5 puntos]

Nota: El primer elemento de una matriz es que el está en la primera fila y en la primera columna.

SOLUCIÓN.

La matriz X debe ser una matriz 2×2: sea $X = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$.

Debe ocurrir:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-2b & 2a-2c \\ 12 & 6a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2+11a & -2-a \\ -b+11c & -b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4-2b-2+11a=0 \\ 12-b+11c=0 \\ 2a-2c-2-a=0 \\ 6a-b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b+11a=-2 \\ -b+11c=-12 \\ a-2c=2 \\ 6a-b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b+11a=-2 \\ b=11c+12 \\ a=2+2c \\ 6(2+2c)-11c-12-c=0 \end{cases} \Rightarrow$$

Sustituyendo los valores de a y de b (2ª y 3ª ecuaciones) en la 1ª y 4ª ecuaciones:

$$-2(11c+12)+11(2+2c)=-2 \Rightarrow -22c-24+22+22c=-2 \Rightarrow 0=0$$
$$12+12c-11c-12-c=0 \Rightarrow 0=0$$

Las dos únicas ecuaciones independientes son la segunda y la tercera y por tanto los elementos a y b pueden escribirse en función de c que podemos considerar como un parámetro λ. Las matrices X son pues de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2+2\lambda \\ 11\lambda+12 & \lambda \end{pmatrix}$$

2. *Sea la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determinar sus coeficientes sabiendo que*

a) pasa por el origen de coordenadas tangencialmente a la bisectriz del primer cuadrante y
b) *tiene un extremo en $x = -0{,}5$* [1,5 puntos]

Determinar la naturaleza del extremo anterior [1 punto]

SOLUCIÓN.

Por pasar por el origen de coordenadas: $f(0)=0 \Rightarrow c=0$

La función derivada es: $f'(x) = 2ax + b$ x

Por tener a la recta $y = x$ como tangente en el origen: $f'(0)=1 \Rightarrow b=1$

Por tener un extremo en $x = -0{,}5$: x

Por tanto, la parábola tiene por ecuación: $f(x) = x^2 + x$

Como $f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ el extremo relativo es un mínimo.

3. *Sea la función* $f(x)=xe^{x}$

a) Calcular la ecuación de su tangente en el origen de coordenadas [0,5 puntos]

b) Determinar los extremos de la función f [1 punto]

c) Hallar el área encerrada entre la gráfica de esta curva, el eje de abscisas y la recta $x=1$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=e^{x}+x\cdot e^{x}=e^{x}(1+x) \;\Rightarrow\; f'(0)=1$ (pendiente de la recta tangente)

Además, pasa por el punto: $f(0)=0$

Ecuación de la recta tangente: $y-0=1\cdot(x-0) \;\Leftrightarrow\; y=x$

b) Puntos críticos: $f'(x)=0 \;\Rightarrow\; e^{x}\cdot(1+x)=0 \;\Rightarrow\; x=-1$ pues $e^{x}\neq 0 \;\; \forall x$

$2\,f''(x)=e^{x}(1+x)+e^{x}=e^{x}(2+x) \;\Rightarrow\; f'(-1)=\frac{1}{e}\cdot 1>0 \;\Rightarrow\;$ en $x=-1$ la función tiene un mínimo: $\left(-1,\,-\frac{1}{e}\right)$

c) La función corta al eje de abscisas en $x=0$. El área pedida es el valor de la integral $\int_0^1 x\,e^{x}\,dx$:

Calculemos una primitiva de la función (aplicaremos el método de partes):

Sean $\begin{array}{l} u=x \;\Rightarrow\; du=dx \\ dv=e^{x}\,dx \;\Rightarrow\; v=e^{x} \end{array} \;\Rightarrow\; \int x\,e^{x}\,dx=x\cdot e^{x}-\int e^{x}\,dx=x\cdot e^{x}-e^{x}=e^{x}(x-1)$

Por tanto: $A=\int_0^1 x\,e^{x}\,dx=\left[e^{x}(x-1)\right]_0^1=e\cdot 0-1\cdot(-1)=1\;\;u^2$

4. *Sean el plano* $\pi: x-2y+4z=12$ *y el punto* $P(2,-1,1)$.

a) Calcular la distancia δ *entre el plano* π *y el punto P* [0,5 puntos]

b) Hallar la ecuación de un plano paralelo a π *y distinto del mismo, que también diste de P la misma distancia* δ [1,5 puntos].

c) Calcular el volumen de la figura limitada por el plano π *y los tres planos coordenados* [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $\delta=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{|2+2+4-12|}{\sqrt{1+4+16}}=\dfrac{4}{\sqrt{21}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$

b) Un plano paralelo a π tendrá por ecuación: $x-2y+4z+D=0$. Se tiene:

$$\frac{|2+2+4+D|}{\sqrt{21}}=\frac{4}{\sqrt{21}} \;\Rightarrow\; 8+D=4 \;\Rightarrow\; D=-4 \text{ luego el plano es: } x-2y+4z-4=0$$

c) Obtengamos los vértices del tetraedro. Uno de ellos es el origen $O(0,\,0,\,0)$; los otros son:

$$\begin{cases} x-2y+4z-12=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(0,\,0,\,3) \qquad \begin{cases} x-2y+4z-12=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(0,\,-6,\,0)$$

$$\begin{cases} x-2y+4z-12=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow C(12,\,0,\,0) \qquad V=\frac{1}{6}\left[OA,\,OB,\,OC\right]=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 216=36\;\;u^3$$