Septiembre 2003

OPCIÓN A

1. *Discutir el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y - az = 2 \\ -x + y - z = a - 1 \end{cases}$ *según los valores del parámetro a* [1,5 puntos]. *Entre los valores de a que hacen el sistema compatible elegir uno en particular y resolver el sistema que resulte al reemplazar a por el valor elegido* [1 punto].

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -a & 2 \\ -1 & 1 & -1 & a-1 \end{array}\right)$

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow$ el rango de ambas matrices es 2 como mínimo.

Veamos para qué valores de a el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -a \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2a + a - 1 - 2 + 1 + a^2 = a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

X Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$: $\text{rg A} = \text{rg M} = 3 = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

X Para $a = -1$: $\text{rg A} = 2$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 2 + 2 + 2 + 2 = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{rg M} = 3$ y como los rangos de ambas matrices son distintos, el sistema es incompatible.

X Para $a = 2$: $\text{rg A} = 2$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg M} = 2 = \text{rg A} < \text{nº de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

< Para la segunda parte del ejercicio (resolución) puede optarse por dar al parámetro un valor distinto de -1 y 2 y resolverlo sabiendo que es compatible determinado, o bien resolverlo para $a = 2$ sabiendo que es compatible indeterminado. Nosotros lo resolveremos en ambos casos y en el primero optaremos por resolverlo sin sustituir a.

X Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$: resolvemos el sistema por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -a \\ a-1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - a - 2} = \frac{-2 - a^2 + a - 2 + 2a - 2 + 2 + a}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{-a^2 + 4a - 4}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{-(a-2)^2}{(a+1)\cdot(a-2)} = -\frac{a-2}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -a \\ -1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - a - 2} = \frac{-2a - a + 1 + a - 2 + 1 + a^3 - a^2}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{a^3 - a^2 - 2a}{(a+1)\cdot(a-2)} = \frac{a\cdot(a+1)\cdot(a-2)}{(a+1)\cdot(a-2)} = a$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}}{(a+1)\cdot(a-2)}=\frac{2a^2-2a+1-2+2-a+1-2a}{(a+1)\cdot(a-2)}=\frac{2a^2-5a+2}{(a+1)\cdot(a-2)}=\frac{2\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot(a-2)}{(a+1)\cdot(a-2)}=\frac{2a-1}{a+1}$$

X Para $a=2$: puesto que el menor distinto de 0 en la matriz de los coeficientes es $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, las ecuaciones segunda y tercera son independientes en las incógnitas x e y. Considerando la incógnita z como parámetro ($z=\lambda$), el sistema a resolver es: $\begin{cases} x+2y=2+2\lambda \\ -x+y=1+\lambda \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones: $3y=3+3\lambda \Rightarrow y=1+\lambda$ y sustituyendo en la primera ecuación: $x=2+2\lambda-2-2\lambda=0$, es decir las soluciones en este caso son: $x=0$, $y=1+\lambda$, $z=\lambda$

2. *Determinar el dominio* [0,5 puntos], *ceros* [0,5 puntos] *y extremos* [1,5 puntos] *de la función* $f(x)=x\ \ln\ x$.

SOLUCIÓN.

X $D(f)=\mathbb{R}^+$ pues la función $y=x$ tiene por dominio $\mathbb{R}$ y la función $y=\ln x$ tiene por dominio $(0,+\infty)$.

X $f(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot\ln x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \ln x=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$ luego la función se anula en $x=0$ y en $x=1$.

X $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1 \Rightarrow f''(x)=\frac{1}{x}$

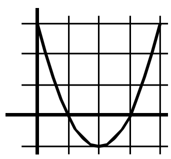
$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x=-1 \Rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$ y como $f''\left(\frac{1}{e}\right)=e>0 \Rightarrow$ en $x=\frac{1}{e}$ la función tiene un mínimo relativo

3. *Sea la parábola* $y=x^2-4x+3$.

a) Determinar los puntos de corte de la parábola con los dos ejes coordenados [0,5 puntos]
b) Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de abscisas [1 punto]
c) Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de ordenadas [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) X Con OX: $y=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} x=1 \Rightarrow (1,0) \\ x=3 \Rightarrow (3,0) \end{cases}$



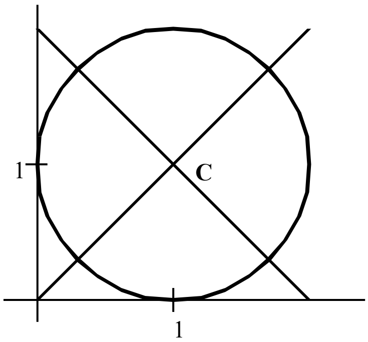
X Con OY: $x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (0,3)$

b) $A=\left|\int_1^3 (x^2-4x+3)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3\right|=\left|(9-18+9)-\left(\frac{1}{3}-2+3\right)\right|=\left|-\frac{1}{3}-1\right|=\frac{4}{3}\ u^2$

c) $A=\int_0^1 (x^2-4x+3)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1=\frac{1}{3}-2+3=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}\ u^2$

4. *Sea C una circunferencia cuyo centro es el punto (1 , 1) y que es tangente a los dos ejes coordenados.*
a) Escribir su ecuación general [1 punto].
b) Determinar los puntos de C donde la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.



a) El centro es $C(1,\ 1)$ y el radio es $r = 1$, con lo que su ecuación es:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \iff x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

b) Los puntos serán los de intersección de la circunferencia con la recta perpendicular a $y = x$ que pasa por C:

pendiente de $y = x$: $m = 1 \Rightarrow$ pendiente de la perpendicular: $m' = -1$
La recta es: $y = -x + n$ y como pasa por $C(1,\ 1) \Rightarrow n = 2$ es decir $y = -x + 2$.

Cortando la recta y la circunferencia: $\begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (-x+2)^2 - 2x - 2(-x+2) + 1 = 0 \Rightarrow$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x + 2x - 4 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Septiembre 2003

OPCIÓN B

1. *Sean las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. *Vemos que ambas tienen rango máximo, o sea 2. Determinar los valores de c tales que la matriz A + cB ya no tenga rango 2* [1,5 puntos]. *¿Cuál es el rango que tienen las respectivas matrices suma?* [1 punto]

SOLUCIÓN.

$A + cB = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}$. Para que el rango no sea 2, el único menor de orden 2 debe ser 0:

$$\begin{vmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{vmatrix} = 0 \iff 2 - c + 2c - c^2 + 4 + 4c = 0 \iff -c^2 + 5c + 6 = 0 \Rightarrow c = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-2} = \frac{-5 \pm 7}{-2} =$$

$= -1\ ,\ 6$.

Por tanto, para $c = -1$ o $c = 6$: $\text{rg}\,(A + cB) = 1$. Para $c \neq -1$ y $c \neq 6$: $\text{rg}\,(A + cB) = 2$

2. *Sea la función* $f(x) = x\,\text{sen}x$ *y sea T la recta tangente a su gráfica en* $x = \pi$ *. Determinar:*

a) La ecuación de T [1,5 puntos]

b) El área encerrada entre T y los ejes coordenados [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) $f(\pi) = 0 \;\Rightarrow\;$ El punto de tangencia es: $(\pi\,,\,0)$.

La pendiente de la recta tangente es $f'(\pi)$ y como $f'(x) = \text{sen}\,x + x\,\cos x \;\Rightarrow\; m = f'(\pi) = -\pi$

Por tanto, la ecuación de T es: $y - 0 = -\pi\cdot(x-\pi) \;\Leftrightarrow\; y = -\pi x + \pi^2$

b) Se trata de un triángulo de base: $\begin{cases} y = 0 \\ y = -\pi x + \pi^2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \pi x = \pi^2 \;\Rightarrow\; x = \pi$

y altura: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\pi x + \pi^2 \end{cases} \;\Rightarrow\; y = \pi^2$

Y, por tanto, su área es: $A = \dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot\pi^2 = \dfrac{\pi^3}{2}\;u^2$

3. *Sea la función* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) Definir su dominio [0,5 puntos]

b) Calcular su límite en el infinito [0,5 puntos]

c) Determinar sus extremos [0,5 puntos]

d) Calcular el área encerrada por la gráfica de f entre las abscisas 0 y 1 [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional en la que su denominador no se anula para ningún valor de x. Por tanto: $D(f) = \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

c) $f'(x) = \dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = -1\;,\; x = 1$ (puntos críticos)

$f''(x) = \dfrac{-2x\cdot\left(x^2+1\right)^2 - \left(-x^2+1\right)\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4} \;\Rightarrow$

$f''(-1) > 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = -1$ hay un mínimo relativo

$f''(1) < 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = 1$ hay un máximo relativo

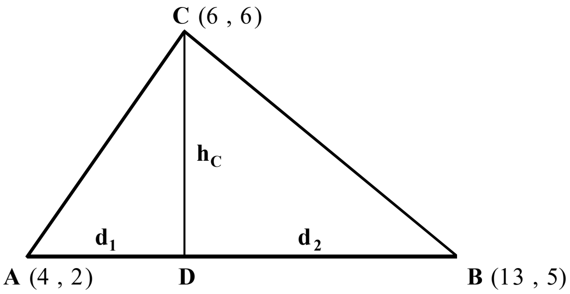
d) $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}\;u^2$

4. *Sea el triángulo de vértices A (4 , 2) , B (13 , 5) y C (6 , 6).*

a) Hallar la ecuación de la altura que pasa por el vértice C [1,5 puntos]

b) Calcular la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado AB [1 punto]

SOLUCIÓN.



a) La altura es la recta perpendicular a AB que pasa por C:

$$AB = (9,\ 3) \;\Rightarrow\; m = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; m' = -3$$

y su ecuación es: $y - 6 = -3 \cdot (x - 6) \;\Leftrightarrow\; y = -3x + 24$

b) Calculemos las coordenadas de D como intersección del lado AB y la altura h_C:

X Ecuación de AB: $y - 2 = \frac{1}{3} \cdot (x - 4) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

X Coordenadas de D:

$$\begin{cases} y = -3x + 24 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases} \;\Rightarrow\; -3x + 24 = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; -9x + 72 = x + 2 \;\Rightarrow\; 10x = 70 \;\Rightarrow\; x = 7\ ,\ y = 3$$

X Por tanto: $d_1 = \sqrt{(7-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$, $d_2 = \sqrt{(13-7)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$