Junio 2001.

OPCIÓN A

1. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, se pide:*

a) Hallar A^n *para todo entero positivo n* [1 punto]
b) Calcular, si existe, la inversa de la matriz A y la de la matriz $I_3 + A$ [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots. \quad A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ No existe A^{-1}

$$I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad |I_3 + A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \exists (I_3 + A)^{-1}$$

$$\mathrm{Adj}(I_3 + A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix} \to \left[\mathrm{Adj}(I_3 + A)\right]^t = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to (I_3 + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Hallar los valores de los coeficientes b, c y d para que la gráfica de la función* $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ *corte al eje OY en el punto (0 , !1), pase por el punto (2 , 3) y en este punto tenga tangente paralela al eje OX* [1,5 puntos]. *Una vez hallados esos valores hallar los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función* [1 punto]

SOLUCIÓN.

X La función debe cumplir: $f(0) = -1$, $f(2) = 3$ y $f'(2) = 0$. Se tiene: $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$f(0) = -1 \Rightarrow d = -1$
$f(2) = 3 \Rightarrow 8 + 4b + 2c - 1 = 3 \Rightarrow 4b + 2c = -4$ (*)
$f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4b + c = 0 \Rightarrow 4b + c = -12$ (*) Restando las igualdades (*): $c = 8 \Rightarrow b = -5$

Por tanto, la función tiene por ecuación: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$

X $f'(x) = 3x^2 - 10x + 8 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-96}}{6} = \dfrac{10 \pm 2}{6} \;\Rightarrow\; x = 2\ ,\ x = \dfrac{4}{3}$ (puntos críticos)

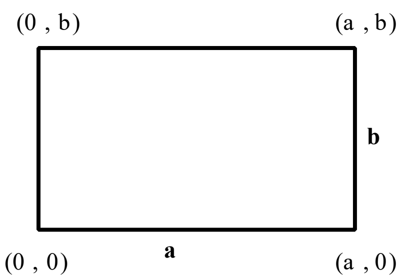
$f''(x) = 6x - 10$: $\quad f''(2) > 0 \;\Rightarrow\;$ En $x = 2$ la función tiene un mínimo relativo: $(2, 3)$

$f''\left(\dfrac{4}{3}\right) < 0 \;\Rightarrow\;$ En $x = \dfrac{4}{3}$ la función tiene un máximo relativo: $\left(\dfrac{4}{3}\ ,\ \dfrac{85}{27}\right)$

X Puesto que la función es continua, los intervalos de crecimiento y decrecimiento están separados por los extremos relativos: $\left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right)$ Y $(2, +\infty)$ $\rightarrow$ Creciente $\quad \left(\dfrac{4}{3}\ , 2\right) \rightarrow$ Decreciente

3. *Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas (0 , 0), (a , 0), (a , b) y (0 , b), de modo que el punto (a , b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación* $y = \dfrac{1}{x^2} + 4$. *De todos estos rectángulos hallar razonadamente el de área mínima* [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.



El área del rectángulo es $A = a \cdot b$

Si (a, b) pertenece a la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{x^2} + 4$, se verifica: $b = \dfrac{1}{a^2} + 4$ por lo que el área del rectángulo está expresada por la función $A = a \cdot \left(\dfrac{1}{a^2} + 4\right) = \dfrac{1}{a} + 4a$ que debe ser mínima.

$A' = -\dfrac{1}{a^2} + 4 = 0 \;\Rightarrow\; a^2 = \dfrac{1}{4} \;\Rightarrow\; a = \dfrac{1}{2}$; $\qquad A'' = \dfrac{2a}{a^4}$ y $A''\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0 \;\Rightarrow\;$ mínimo

Por tanto, el rectángulo de área mínima debe tener $a = \dfrac{1}{2}$ de base y $b = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} + 4 = 8$ de altura, es decir, las coordenadas de sus vértices son: $(0, 0)$, $\left(\dfrac{1}{2}\ , 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}\ , 8\right)$ y $(0, 8)$.

4. *Sean r la recta determinada por los puntos A (1, 0, !1) y B (1, !1, !1) y s la recta de ecuaciones* $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{3}$. *Se pide:*

a) Averiguar su posición relativa [1 punto]

b) Hallar, si existe, una recta que pase por el punto C (1, 2, 4) y que corte a las rectas r y s [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) Un vector direccional de r es $\overline{u} = BA = (0, 1, 0)$ y uno de sus puntos es $A(1, 0, -1)$, por ejemplo. Un vector direccional de s es $\overline{v} = (2, 5, 3)$ y uno de sus puntos $P(3, 0, 0)$.

Puesto que las coordenadas de los vectores direccionales no son proporcionales, las rectas no son paralelas y, por tanto, se cortan o se cruzan. Para diferenciar una posición de la otra, veamos si las rectas son o no coplanarias. Para ello, consideremos el vector $AP = (2, 0, 1)$ de origen un punto de r y extremo un punto de s y comprobemos si los vectores

$\overline{u}$, $\overline{v}$ y AP son linealmente independientes (r y s no están en el mismo plano y se cruzan) o dependientes (r y s están en un mismo plano y se cortan):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{los vectores son linealmente independientes} \quad \Rightarrow \quad \text{las rectas se cruzan.}$$

b) Hallemos el plano que contiene a r y a C y el plano que contiene a s y a C. La intersección de ambos planos, si existe, será la recta pedida.

X Plano que contiene a r y pasa por C:
Sea $X(x\,,\,y\,,\,z)$ un punto cualquiera del plano. Vectores del plano son $\overline{u} = BA = (0\,,1\,,0)$, $\overline{u}' = AC = (0\,,2\,,5)$ y $AX = (x-1,\ y\,,\ z+1)$ que deben ser linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ x-1 & y & z+1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 5(x-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 1 = 0 \quad (*)$$

X Plano que contiene a s y pasa por C:
Sea $X(x\,,\,y\,,\,z)$ un punto cualquiera del plano.
Vectores del plano son $\overline{v} = (2\,,5\,,3)$, $\overline{v}' = PC = (-2\,,2\,,4) \approx (-1\,,1\,,2)$ y $PX = (x-3\,,\ y\,,\ z)$ que deben ser linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ x-3 & y & z \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2z - 3y + 10(x-3) - 3(x-3) - 4y + 5z = 7(x-3) - 7y + 7z = 0 \;\Leftrightarrow\; x - y + z - 3 = 0 \quad (*)$$

Los planos (*) no son paralelos luego se cortan en una recta, que es la recta pedida: $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$

Junio 2001

OPCIÓN B

1. *Tenemos una matriz 3H3 cuyas columnas son (de izquierda a derecha): C_1 , C_2 , C_3 y su determinante vale 2.*
a) Se considera la matriz A cuyas columnas son (de izquierda a derecha): !C_2 , C_3+C_2 , $3C_1$, calcular razonadamente el determinante de la matriz $A^{!1}$ caso de que esta matriz inversa exista [1,5 puntos].
b) Sea ahora la matriz cuyas columnas son: C_1+C_2 , C_2+C_3 , C_3!C_1. Razonar la existencia o no existencia de la matriz inversa de la misma [1 punto]

SOLUCIÓN.

Sea $B = (C_1 \quad C_2 \quad C_3)$ y $|B| = 2$

a) $|A| = |-C_2 \quad C_3 + C_2 \quad 3C_1| \overset{(1)}{=} |3C_1 \quad -C_2 \quad C_3 + C_2| \overset{(2)}{=} -3 \cdot |C_1 \quad C_2 \quad C_3 + C_2| \overset{(3)}{=}$

$= -3 \cdot |C_1 \quad C_2 \quad C_3| = -3 \cdot |B| = -6$

Propiedades aplicadas: (1) "Si en un determinante se cambian entre sí dos líneas, el determinante cambia de signo", aplicada dos veces con lo que el determinante no varía el signo. (2) "Si se multiplican (o dividen) los elementos de una línea por un número, el determinante queda multiplicado (o dividido) por ese número" (3) "Si a una columna se le suma una combinación lineal de otras columnas, el determinante no varía"

Puesto que $\left| A \cdot A^{-1} \right| = \left| I \right| = 1 = \left| A \right| \cdot \left| A^{-1} \right| \;\Rightarrow\; \left| A^{-1} \right| = \dfrac{1}{\left| A \right|} = -\dfrac{1}{6}$

b) La primera columna es la diferencia de la segunda y la tercera: $C_1 + C_2 = C_2 + C_3 - C_3 + C_1$ por lo que el determinante de la matriz será 0 al ser una columna combinación lineal de las otras $\Rightarrow$ La matriz no tiene inversa.

2. *Hallar el punto de la curva de ecuación* $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ *en el que la tangente a la misma tiene pendiente mínima. Escribir la ecuación de dicha tangente* [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

La tangente a la gráfica de una función en un punto es el valor de la función derivada en dicho punto. Se trata entonces de averiguar en qué punto $f'(x)$ es mínima:

$m = f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \;\rightarrow\;$ mínima $\qquad m' = 6x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$ (punto crítico)

$m'' = 6 > 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = 1$ la función tiene un mínimo

Se trata entonces del punto $(1, 0)$. En este punto la tangente tiene por pendiente: $m = 3 - 6 + 6 = 3$

Ecuación de la tangente: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \;\Rightarrow\; y = 3 \cdot (x - 1) \;\Leftrightarrow\; 3x - y - 3 = 0$

3. *Hallar todas las funciones f cuya derivada es* $f'(x) = \dfrac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$ *indicando el dominio de definición de éstas* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Tenemos que hallar las primitivas de $f'(x)$: $\displaystyle\int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}\, dx$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 1 & x^2 + x \\ \hline
!x^4 \; ! \; x^3 & x^2 \; ! \; x + 1 \\ \cline{1-1}
\quad ! \; x^3 + 0x^2 + x + 1 & \\
\quad\;\; x^3 + x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad x^2 + x + 1 & \\
\qquad\; !x^2 \; ! \; x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 1 &
\end{array}
$$

$$\int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}\, dx = \int \left(x^2 - x + 1 + \frac{1}{x^2 + x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{1}{x^2 + x}\, dx = (1)$$

Descompongamos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} = \frac{Ax + A + Bx}{x(x + 1)} = \frac{(A + B)x + A}{x^2 + x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; A = 1 \;,\; B = -1$$

Luego: $(1)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{-1}{x+1}\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\ln x-\ln(x+1)+C=$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\ln\frac{x}{x+1}+C$

El dominio será $D=\left\{x\in R\ /\ \frac{x}{x+1}>0\ ,\ x\neq -1\right\}$. Estudiemos el signo de $\frac{x}{x+1}$:

x / x+1 > 0   x / x+1 < 0   x / x+1 > 0

! 1   0

Luego: $D=(-\infty,-1)\ \mathrm{Y}\ (0,+\infty)$

4. *Dados los puntos: A (1, 0, 0), B (0, !1, 0) y C (0, 0, 3), se pide:*
a) Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de A, B y C, indicando qué figura forman [1,5 puntos].
b) Hallar las coordenadas del centro de la circunferencia que pasa por esos puntos [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Sea $P(x, y, z)$ un punto del lugar geométrico. Se verifica: $d(P, A)=d(P, B)=d(P, C)$.

$d(P, A)=d(P, B)\ \Rightarrow\ \sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2+z^2}\ \Rightarrow\ x^2-2x+1+y^2+z^2=x^2+y^2+2y+1+z^2$

$\Rightarrow\ 2x+2y=0\ \Leftrightarrow\ x+y=0$ que es la ecuación de un plano π.

$d(P, B)=d(P, C)\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2+(y+1)^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}\ \Rightarrow\ x^2+y^2+2y+1+z^2=x^2+y^2+z^2-6z+9$

$\Rightarrow\ 2y+6z-8=0\ \Leftrightarrow\ y+3z-4=0$ que es la ecuación de un plano π'.

Los puntos que equidistan de A, B y C deben verificar al mismo tiempo ambas ecuaciones $\Rightarrow$ el lugar geométrico es la recta intersección de π y π':

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+3z-4=0 \end{cases}$$

b) El centro de la circunferencia equidista de A, B y C, luego debe estar en la recta anterior y además están en el mismo plano. La intersección de la recta y el plano será el punto buscado.

Obtengamos la ecuación del plano que contiene a A, B y C. Sea $X(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano. Los vectores AB, AC y AX están en el mismo plano y son linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ x-1 & y & z \end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ -3(x-1)+3y-z=0\ \Leftrightarrow\ -3x+3y-z+3=0$$

Calculemos el punto de intersección de la recta y el plano: $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 3z = 4 \\ 3x - 3y + z = 3 \end{cases}$.

Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9-4}{1+9+9} = \frac{5}{19} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{19} = \frac{4-9}{19} = -\frac{5}{19} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{19} = \frac{3+12+12}{19} = \frac{27}{19}$$

Luego el centro de la circunferencia que pasa por A, B y C es: $O\left(\frac{5}{19}\ ,-\frac{5}{19}\ ,\ \frac{27}{19}\right)$