Septiembre 2001

OPCIÓN A

1. *Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:* $\begin{cases} x + 2y + z = a \\ x + y - az = a \\ 2x + 3y + z = a \end{cases}$ *, se pide:*

1) *Discusión del mismo en función del parámetro a.* [1 punto]
2) *Resolución en los casos de compatibilidad.* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

1) Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -a & a \\ 2 & 3 & 1 & a \end{array}\right)$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el rango de ambas matrices es, como mínimo, 2.

Estudiemos para qué valores de a el rango es 3: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 - 4a - 2 - 2 + 3a = -a = 0 \Rightarrow a = 0$

Se tiene:

X Para $a \neq 0$: $\text{rg } A = \text{rg } M = 3 = \text{nº de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

X Para a = 0: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2$ y entonces: $\text{rg } A = \text{rg } M = 2 < \text{nº de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

2) X Para $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado. Para resolverlo, aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 1 & -a \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-a} = \frac{a + 3a - 2a^2 - a - 2a + 3a^2}{-a} = \frac{a^2 + a}{-a} = -a - 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & -a \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a} = \frac{a + a - 2a^2 - 2a - a + a^2}{-a} = \frac{-a^2 - a}{-a} = a + 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}}{-a} = \frac{a + 3a + 4a - 2a - 3a - 2a}{-a} = \frac{a}{-a} = -1$$

X Para $a = 0$: las dos primeras ecuaciones son independientes para las incógnitas x e y. Considerando $z = \lambda$, como un parámetro, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + 2y = -\lambda \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ restando las dos ecuaciones: } \quad y = -\lambda \quad , \quad x = \lambda \quad , \quad z = \lambda$$

2. *Sea f la función definida para todo número real x de modo que para los valores de x pertenecientes al intervalo cerrado [!1 , 1] se tiene* $f(x) = (x+1)(x-1)^2$ *y para los valores de x no pertenecientes a dicho intervalo se tiene f(x) = 0. Se pide:*

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad. [1,5 puntos]

b) Hallar razonadamente su valor máximo, indicando el valor o valores de x en donde se alcanza. [1 punto]

SOLUCIÓN.

Se tiene: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ x^3 - x^2 - x + 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) X Continuidad: la función es continua $\forall x \ne -1$ y 1 porque la función es constante o polinómica. Veamos si lo es en cada uno de dichos puntos:

$$\left.\begin{array}{c} \exists f(-1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0 \ , \ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) \end{array}\right| \Rightarrow \text{ la función es continua en } x = -1$$

$$\left.\begin{array}{c} \exists f(1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 \ , \ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \end{array}\right| \Rightarrow \text{ la función es continua en } x = 1$$

Por tanto, la función es continua $\forall x$

X Derivabilidad: la función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 3x^2 - 2x - 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La función es derivable $\forall x \ne -1$ y 1. Veamos lo que ocurre en estos valores:

$$\left|\begin{array}{l} f'(-1^-) = 0 \\ f'(-1^+) = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \text{ la función no es derivable en } x = -1$$

$$\left|\begin{array}{l} f'(1^-) = 0 \\ f'(1^+) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{ la función es derivable en } x = 1$$

b) Puesto que la función es constante e igual a 0 para $x < -1$ y para $x > 1$, analicemos los puntos del intervalo $(-1, 1)$ donde la función alcance su máximo relativo:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = -\frac{1}{3} \ , \ 1$$

$$f''(x) = 6x - 2 : \left|\begin{array}{l} f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -4 < 0 \Rightarrow \text{ la función tiene un máximo en } x = -\frac{1}{3} \text{ de valor: } f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{27} \\ \qquad f''(1) = 4 > 0 \Rightarrow \text{ en } x = 1 \text{ la función tiene un mínimo relativo} \end{array}\right.$$

Por tanto, la función alcanza su valor máximo en $x = -\frac{1}{3}$

3. *Hallar la función f definida en todo número real que verifica las dos condiciones siguientes:*

a) $f'(x) = x^2 e^x$

b) Su gráfica pasa por el punto (0 , 2). [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

La función f es la primitiva de f'(x) que pasa por el punto (0 , 2): $f(x) = \int x^2 e^x \, dx$

Aplicamos el método de integración por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\left| \begin{array}{l} u = x^2 \;\Rightarrow\; du = 2xdx \\ dv = e^x \, dx \;\Rightarrow\; v = e^x \end{array} \right| \Rightarrow\; f(x) = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x \cdot dx$$

Para calcular la nueva integral, aplicamos otra vez el método de integración por partes:

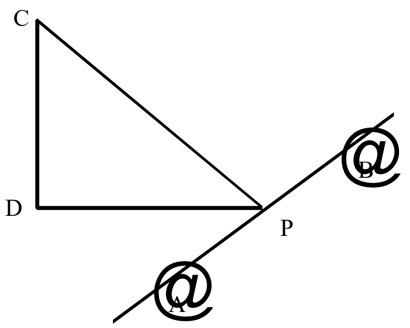
$$\left| \begin{array}{l} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = e^x \cdot dx \;\Rightarrow\; v = e^x \end{array} \right| \Rightarrow\; \int x \cdot e^x \cdot dx = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x \;\Rightarrow\; f(x) = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C \;=$$

$$= e^x \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) + C$$

Haciendo que pase por el punto $(0,\ 2)$: $f(0) = 2 + C = 2 \;\Rightarrow\; C = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = e^x \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right)$

4. *Dados los puntos A (1 , 1 , 1), B (!1 , 3 , 1), C (1 , 0 , 0) y D (0 , 2 , 0), se pide hallar el punto P perteneciente a la recta determinada por A y B tal que el triángulo CDP sea rectángulo con hipotenusa CP.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



La recta determinada por A y B tiene como vector direccional:

$\overline{AB} = (-2,\ 2,\ 0) \;\Rightarrow\; \bar{u} = (-1,\ 1,\ 0)$

y, por tanto, su ecuación en paramétricas es: $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow\; P(1 - t,\ 1 + t,\ 1)$.

Los vectores $\overline{CD}$ y $\overline{DP}$ son: $\overline{CD} = (-1,\ 2,\ 0)$

$\overline{DP} = (1 - t,\ -1 + t,\ 1)$

y como deben ser perpendiculares: $\overline{CD} \cdot \overline{DP} = 0 \;\Rightarrow\; -1 + t - 2 + 2t = 0 \;\Rightarrow\; t = 1$

Por tanto, el punto P debe ser: $P(0,\ 2,\ 1)$

OPCIÓN B

1. *Dadas las matrices:* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, se pide:*

a) Calcular $A^2 - 4A + 4I_3$ [1 punto]
b) Calcular, si existe, la inversa de la matriz A [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 4A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

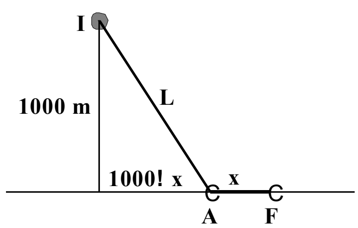
b) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Para calcular la matriz inversa: $A \to A^t \to \mathrm{Adj}(A^t) \to \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A^t) = A^{-1}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. *Un pequeño islote dista 1 km de una costa rectilínea. Queremos instalar en dicho islote una señal luminosa que se ha de alimentar con un tendido eléctrico. La fuente de energía está situada en la costa en un punto distante 1 km del punto de la costa más próximo al islote. El coste del tendido submarino por unidad de longitud es* $\frac{5}{3}$ *del tendido en tierra. ¿A qué distancia de la fuente de energía debe empezar el tendido submarino para conseguir un coste mínimo?* [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

Sea I el islote, F la fuente de energía y A el punto de la costa donde el cable debe sumergirse. Sea x la distancia desde F a A, es decir la longitud del cable terrestre (en metros). La longitud del cable sumergido es:



$$L = \sqrt{1000^2 + (1000 - x)^2} = \sqrt{10^6 + 10^6 - 2000x + x^2} = \sqrt{x^2 - 2000x + 2000000}$$

Si consideramos como 1 el coste del cable en tierra por unidad de longitud, el coste del cable submarino será de $\frac{5}{3}$ por unidad de longitud. El coste total será entonces: $C(x) = x + \frac{5}{3} \cdot \sqrt{x^2 - 2000x + 2000000}$ que debe ser mínimo.

$$C'(x)=1+\frac{5}{3}\cdot\frac{2x-2000}{2\sqrt{x^2-2000x+2000000}}=1+\frac{5\cdot(x-1000)}{3\sqrt{x^2-2000x+2000000}}=0 \;\Rightarrow\; \frac{5\cdot(x-1000)}{3\sqrt{x^2-2000x+2000000}}=-1 \;\Rightarrow$$

$$5\cdot(x-1000)=-3\cdot\sqrt{x^2-2000x+2000000} \;\Rightarrow\; 25x^2-50000x+25000000=9x^2-18000x+18000000 \;\Rightarrow$$

$$16x^2-32000x+7000000=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{32000\pm\sqrt{1024000000-448000000}}{32}=\frac{32000\pm 24000}{32}=\begin{cases}1750\\250\end{cases}$$

De las dos soluciones posibles, es evidente que la solución de nuestro problema es la segunda, es decir, el cable debe sumergirse a 250 metros de la fuente de energía.

3. *Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones* $y=2-x^4$ *e* $y=x^2$ [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

Consideremos la función diferencia de las dos funciones dadas: $f(x)=2-x^4-x^2=-x^4-x^2+2$. El área limitada por ambas funciones es el área del recinto limitado por f(x) y el eje OX.

Puntos de corte de f(x) con OX: $-x^4-x^2+2=0 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases}-2 \;\Rightarrow\; \text{no existe x}\\ 1 \;\Rightarrow\; x=-1\ ,\ x=1\end{cases}$

Por tanto: $A=\int_{-1}^{1}\left(-x^4-x^2+2\right)dx=\left[-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{1}=\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-2\right)=\frac{22}{15}+\frac{22}{15}=\frac{44}{15}\ u^2$

4. *Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje OX en el punto $(4,0)$ y pasa por el punto* $\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$ [1,5 puntos]. *Hallar la ecuación de la otra tangente a esta circunferencia que pasa por el origen de coordenadas* [1 punto].

SOLUCIÓN.

Si la circunferencia es tangente a OX en $(4,\ 0)$, su centro es el punto $C\,(4,\ b)$ y debe ocurrir:

$$d\left(C,\left(\frac{8}{5}\ ,\ \frac{6}{5}\right)\right)=b \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\left(4-\frac{8}{5}\right)^2+\left(b-\frac{6}{5}\right)^2}=b \;\Leftrightarrow\; \frac{144}{25}+b^2-\frac{12}{5}b+\frac{36}{25}=b^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{12}{5}b=\frac{180}{25} \;\Rightarrow\; b=3$$

Se trata entonces de la circunferencia de centro $C\,(4,\ 3)$ y radio 3, es decir:

$$(x-4)^2+(y-3)^2=9 \;\Leftrightarrow\; x^2-8x+16+y^2-6y+9=9 \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2-8x-6y+16=0$$

Porque pasa por el origen de coordenadas, la recta tiene por ecuación y = mx y el sistema $\begin{cases}y=mx\\x^2+y^2-8x-6y+16=0\end{cases}$ tiene una única solución: $x^2+m^2x^2-8x-6mx+16=0 \;\Rightarrow\; \left(1+m^2\right)x^2-(8+6m)x+16=0$ y para que la ecuación tenga una sola solución: $(8+6m)^2-4\cdot\left(1+m^2\right)\cdot 16=0 \;\Rightarrow\; 64+96m+36m^2-64-64m^2=0 \;\Rightarrow$ $-28m^2+96m=0 \;\Rightarrow\; m\cdot(-28m+96)=0 \;\Rightarrow\; m=0\ ,\ m=\frac{96}{28}=\frac{24}{7} \;\Rightarrow$ hay dos tangentes a la circunferencia que pasan por el origen de coordenadas: el propio eje de abscisas (como ya sabíamos) y la recta $y = \frac{24}{7}x \Leftrightarrow 24x - 7y = 0$