Junio 2000.

OPCIÓN A

1. *Hallar, si existe, una matriz cuadrada 2H2, A, que cumpla las siguientes condiciones:*

1) Coincide con su traspuesta.

2) Verifica la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

3) Su determinante vale 9. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

X $A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

X $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{12} + a_{22} \\ -a_{11} - a_{12} & -a_{12} - a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & -a_{11} - a_{12} + a_{12} + a_{22} \\ -a_{11} - a_{12} & a_{11} + a_{12} - a_{12} - a_{22} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{12} = -3 \\ -a_{11} + a_{22} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = -a_{11} - 3 \\ a_{22} = a_{11} - 3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{11} - 3 \\ -a_{11} - 3 & a_{11} - 3 \end{pmatrix}$

X $\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{11} - 3 \\ -a_{11} - 3 & a_{11} - 3 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow a_{11}^2 - 3a_{11} - a_{11}^2 - 3a_{11} - 3a_{11} - 9 = 9 \Rightarrow -9a_{11} = 18 \Rightarrow a_{11} = -2$

Por tanto, la matriz A es: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

2. *Hallar los valores de las constantes a, b y c para que las gráficas de las funciones*

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad y \quad g(x) = x^3 + c$$

pasen por el punto (1 , 2) y en este punto tengan la misma tangente. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Por pertenecer el punto $(1,\ 2)$ a ambas funciones: $f(1) = 2$; $g(1) = 2$ y por tener en dicho punto la misma tangente: $f'(1) = g'(1)$.

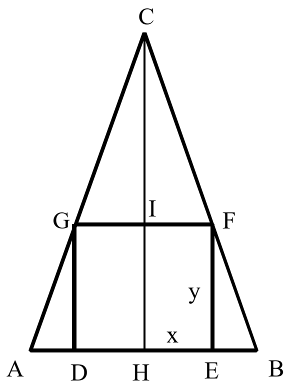
$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b = 1$; $g(1) = 2 \Rightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(1) = 2 + a \\ g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g'(1) = 3 \end{array}\right. \Rightarrow f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2 + a = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 0$$

Por tanto, las funciones son: $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^3 + 1$

3. *Un triángulo isósceles tiene 10 cm de base (que es el lado desigual) y 20 cm de altura. Se inscribe en este triángulo un rectángulo uno de cuyos lados se apoya en la base del triángulo. Hallar las dimensiones del rectángulo así construido y que tenga la mayor área posible.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Sea x la mitad de la base e y la altura del rectángulo. La función que debe ser máxima es $A = 2xy$.

Como la función depende en principio de dos variables, busquemos una relación entre ellas. Los triángulos CHB y FEB son semejantes por lo que puede establecerse la siguiente proporción:

$$\frac{CH}{EF} = \frac{HB}{EB} \iff \frac{20}{y} = \frac{5}{5-x} \Rightarrow y = \frac{20\cdot(5-x)}{5} = 4\cdot(5-x) = 20-4x$$

La función que debe ser máxima es: $A = 2x(20-4x) = 40x - 8x^2$. Veamos para qué valor alcanza su máximo:

$A' = 40 - 16x = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$ y como $A'' = -16 < 0 \Rightarrow$ la función alcanza un máximo para $x = \frac{5}{2}$. Para este valor de x: $y = 20 - 4\cdot\frac{5}{2} = 20 - 10 = 10$

Las dimensiones del rectángulo son: base = 5 cm , altura = 10 cm.

4. *Dada la recta r de ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases}$ *y los puntos P (1, 1, 2) y Q (1, !1, 2), se pide:*

1) Encontrar la posición relativa de r y la recta determinada por P y Q [1,5 puntos]
2) Hallar el punto o puntos R de r para los que el triángulo PQR es isósceles de lados iguales PR y QR [1 punto].

SOLUCIÓN.

1) Un vector direccional de la recta r es $\bar{u} = (2,\ 1,\ 0)$ y un punto de la misma el $A(-1,\ -1,\ 1)$. En la recta que pasa por P y Q, un vector direccional es $\bar{v} = PQ = (0,\ -2,\ 0)$ y uno de sus puntos el $P(1,\ 1,\ 2)$, por ejemplo.

Veamos si los vectores $\bar{u}, \bar{v}$ y $AP = (2,\ 2,\ 1)$ son o no linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{ los vectores son linealmente independientes } \Rightarrow \text{ las rectas se cruzan.}$$

2) Un punto cualquiera de r es: $R(-1+2\alpha,\ -1+\alpha,\ 1)$.

$$d(P,\ R) = d(Q,\ R) \Rightarrow \sqrt{(1+1-2\alpha)^2 + (1+1-\alpha)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(1+1-2\alpha)^2 + (-1+1-\alpha)^2 + (2-1)^2} \Rightarrow$$
$$4 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 + \alpha^2 - 4\alpha + 1 = 4 + 4\alpha^2 - 8\alpha + \alpha^2 + 1 \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow R(1,\ 0,\ 1)$$

Junio 2000

OPCIÓN B

1. *Discutir el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}$ *según los valores del parámetro a* [1 punto]. *Resolverlo en todos los casos de compatibilidad* [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

Sean A y B las matrices de los coeficientes y ampliada, respectivamente: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & a & a \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = a-1-(a-1)^2 = a-1-a^2+2a-1 = -a^2+3a-2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = 1 \;,\; a = 2$$

X Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$: $\text{rg}\,A = \text{rg}\,B = \text{n}^\text{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

Para resolverlo aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ a & a-1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)\cdot(a-2)} = \frac{a-a-(a-1)^2}{(a-1)(a-2)} = \frac{-(a-1)^2}{(a-1)(a-2)} = -\frac{a-1}{a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{(a-1)(a-2)} = \frac{a-1-a\cdot(a-1)}{(a-1)(a-2)} = \frac{a-1-a^2+a}{(a-1)(a-2)} = \frac{-a^2+2a-1}{(a-1)(a-2)} = -\frac{(a-1)^2}{(a-1)(a-2)} = -\frac{a-1}{a-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)(a-2)} = \frac{a-1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2}$$

X Si $a = 1$: $\text{rg}\,A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Orlando el menor anterior con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-1 = 0 \Rightarrow \text{rg}\,B = 2$.

Por tanto: $\text{rg}\,A = \text{rg}\,B = 2 < \text{n}^\text{o}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Resolución: las dos ecuaciones independientes son la primera y la segunda y utilizando z como parámetro:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 - k,\; y = 0,\; z = k$$

X Si $a=2$: $\operatorname{rg} A = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} B = 3$. Por tanto, el sistema es incompatible para $a=2$.

2. *Se considera la función:* $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x}$

1) *Estudiar su continuidad y derivabilidad cuando x = 1.* [1 punto]
2) *¿Alcanza para dicho valor de x un máximo o mínimo relativo? Razonar la respuesta.* [1 punto]
3) *Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, se pregunta si el extremo en cuestión es absoluto.* [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$|x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x<1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ y, por tanto: $f(x) = \begin{cases} -1+\dfrac{1}{x} & \text{si } x<1 \\ 1-\dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) **Continuidad**:

X $\exists\, f(1) = 0$

X $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(-1+\dfrac{1}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ luego $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

X $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y, por tanto, la función es continua en x = 1.

Derivabilidad: la función derivada de f(x) es $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ y como $f'(1^-) = -1$ y $f'(1^+) = 1$

$\Rightarrow$ la función no es derivable en x = 1 pues sus derivadas laterales son distintas

2) Puesto que $f'(1^-) < 0$, la función es decreciente a la izquierda de 1. Como $f'(1^+) > 0$, la función es creciente a la derecha de 1. Por tanto, en x = 1 la función alcanza el menor valor de entre los puntos próximos $\Rightarrow$ es un mínimo.

3) No es un mínimo absoluto puesto que la recta x = 0 es una asíntota vertical de la función y a la izquierda de 0 la función decrece indefinidamente.

3. *Haciendo el cambio de variable* $u = e^x$ *calcular* $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$

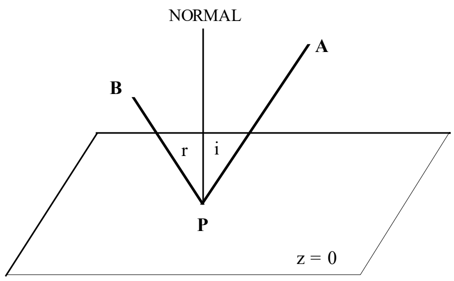
Se tiene: $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \int \frac{du}{u^2-1} = (1)$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1} = \frac{Au-A+Bu+B}{(u+1)(u-1)} = \frac{(A+B)u-A+B}{u^2-1} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \text{ , } B = \frac{1}{2}$$

$$(1) = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} = -\frac{1}{2}\ln(u+1) + \frac{1}{2}\ln(u-1) = \ln\sqrt{\frac{u-1}{u+1}} = \ln\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} + C$$

4. *Suponer que el plano coordenado $z = 0$ es un espejo (reflectante en ambas caras). Desde el punto A (3, 2, 4) se emite un rayo de luz, que reflejándose en este espejo, ilumina el punto B (0, !1, 2).*
1) ¿En qué punto del espejo debe incidir el citado rayo? [1,5 puntos]
2) Hallar la ecuación general del plano que contiene a los rayos incidente y reflejado. [1 punto]

SOLUCIÓN.



Como P está en el plano $z = 0$, sus coordenadas son: $P(x,\ y,\ 0)$ y el vector $AP = (x-3,\ y-2,\ -4)$ y el $BP = (x,\ y+1,\ -2)$.
Un vector normal al plano es: $\overline{n} = (0,\ 0,\ 1)$.

Debe suceder: ≅ $\hat{i} = \hat{r} \Rightarrow \cos\hat{i} = \cos\hat{r}$
≅ AP, BP y $\overline{n}$ están en un mismo plano.

≅ De la primera condición:

$$\cos\ \hat{i} = \frac{AP\cdot\overline{n}}{|AP|\cdot|\overline{n}|} = \frac{-4}{\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2+16}\cdot\sqrt{1}} = \frac{-4}{\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+29}}$$

$$\cos\ \hat{r} = \frac{BP\cdot\overline{n}}{|BP|\cdot|\overline{n}|} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+(y+1)^2+4}} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+y^2+2y+5}}$$

Igualando:

$$-4\sqrt{x^2+y^2+2y+5} = -2\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+29} \Rightarrow 16\left(x^2+y^2+2y+5\right) = 4\left(x^2+y^2-6x-4y+29\right) \Rightarrow$$

$$4x^2+4y^2+8y+20 = x^2+y^2-6x-4y+29 \Rightarrow 3x^2+3y^2+6x+12y-9=0 \Rightarrow x^2+y^2+2x+4y-3=0 \quad (*)$$

≅ De la segunda condición, si los tres vectores están en un mismo plano son linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & -4 \\ x & y+1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-3)(y+1)-x(y-2)=0 \Rightarrow xy+x-3y-3-xy+2x=0 \Rightarrow x-y-1=0 \quad (**)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (*) y (**):

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-3=0 \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow x^2+x^2-2x+1+2x+4x-4-3=0 \Rightarrow 2x^2+4x-6=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm4}{2} \Rightarrow x=1\ ,\ x=-3 \Rightarrow y=0\ ,\ y=-4$$

Nos salen dos soluciones: $P_1\ (1, 0, 0)$ y $P_2\ (-3, -4, 0)$

2) La ecuación del plano ya ha sido obtenida en (**): $x-y-1=0$