Septiembre 2000

OPCIÓN A

1. *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$*, se pide:*

i) Hallar el valor o valores de a para que se cumpla la igualdad $A^2 + 2A + I = O$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3 [1,5 puntos].
ii) Calcular en esos casos la matriz inversa de A [1 punto].

SOLUCIÓN.

i) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2a & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

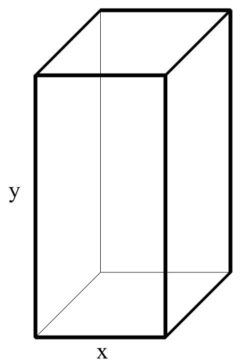
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+2a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$$

ii) Para $a = -1$: como $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ la matriz A tiene inversa. Para calcularla, damos los siguientes pasos: (1) Calculamos la matriz traspuesta: A^t. (2) Calculamos la matriz adjunta de la traspuesta: $\mathrm{Adj}(A^t)$. (3) Dividimos por el valor del determinante de A: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{Adj}(A^t)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, hallar las dimensiones (lado de la base y altura) del que tiene volumen máximo.* [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



Se tiene: $2x + 2y = 30 \Leftrightarrow x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$

La función que debe ser máxima es: $V = x^2 \cdot y = x^2 \cdot (15 - x) = 15x^2 - x^3$

Estudiemos los valores de x en los que esta función alcanza un máximo:

$V' = 30x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x\,(10 - x) = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x = 10$

$V'' = 30 - 6x$: $\begin{array}{l} V''(0) = 30 > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ mínimo} \\ V''(10) = -30 < 0 \Rightarrow x = 10 \text{ máximo} \end{array}$

Por tanto, las medidas del prisma de volumen máximo son: arista de la base = 10 cm , arista lateral = 5 cm

3. *Tenemos la función f definida para todo número real no negativo y dada por* $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$

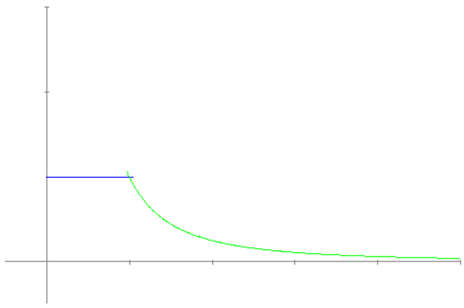
Se pide su representación gráfica [0,5 puntos], *hallar* $\int_0^3 f(x)\,dx$ [1,5 puntos] *e interpretar geométricamente el resultado* [0,5 puntos].

SOLUCIÓN.

X La función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ es decreciente $\forall x>1$ pues $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}<0 \quad \forall x>1$.

X $\lim\limits_{x\to\infty^+}\dfrac{1}{x^2}=0^+ \Rightarrow y=0$ es asíntota horizontal.

X Pasa por $(1,1)$, $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$, ...



X $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 1\,dx+\int_1^3\frac{1}{x^2}\,dx=[x]_0^1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3=1-0+\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{5}{3}$

Se trata del área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=3$.

4. *Hallar la ecuación de la circunferencia C que pasa por los puntos (0, 2) y (0, !2) y es tangente a la recta r: y = 3x + 2* [1,5 puntos]. *En el haz de rectas paralelas a r hay otra tangente a C, hallar su ecuación.* [1 punto]

SOLUCIÓN.

Puesto que la tangente $y=3x+2$ pasa por el punto $(0,\ 2)$ y la circunferencia también, éste debe ser el punto de tangencia. El centro de la circunferencia estará en el punto de corte de la mediatriz del segmento de extremos $(0,2)$ y $(0,-2)$ que es el eje de abscisas $y=0$ y la normal a $y=3x+2$ en $(0,\ 2)$: $y-2=-\dfrac{1}{3}x \Leftrightarrow y=2-\dfrac{x}{3}$

El centro de la circunferencia es por tanto: $\begin{cases}y=0\\ y=2-\dfrac{x}{3}\end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{3}=2 \Rightarrow x=6 \Rightarrow C(6,0)$

El radio es: $r=\sqrt{(6-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

La ecuación de la circunferencia es por tanto: $(x-6)^2+(y-0)^2=40 \Leftrightarrow x^2+y^2-12x-4=0$

El haz de rectas paralelas a r es: $y=3x+n$ y el punto de tangencia de la segunda tangente debe ser el simétrico del $(0,2)$ respecto al centro de la circunferencia:

$$6=\frac{0+x_0}{2} \Rightarrow x_0=12 \quad ; \quad 0=\frac{2+y_0}{2} \Rightarrow y_0=-2 \quad \text{es decir, el punto } (12,-2).$$

Haciendo que la recta del haz pase por este punto: $-2=36+n \Rightarrow n=-38 \Rightarrow y=3x-38$

Septiembre 2000

OPCIÓN B

1. *Sea A una matriz 4H4 cuyas filas, de arriba a abajo son F_1, F_2, F_3 y F_4 y cuyo determinante vale 2. Sea* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Calcular razonadamente:*

1) El determinante de la matriz A B [1 punto]
2) El determinante de la matriz 3 A [0,5 puntos]
3) El determinante de la matriz cuyas filas son (de arriba a abajo): $2F_1 + F_2$, !F_2 , $3F_4$ y F_3+F_1 [1 punto]

SOLUCIÓN.

Calculemos el determinante de B: $|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

(1) y (2): desarrollando por los adjuntos de la primera fila

1) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-1) = -2$

2) Si multiplicamos todos los elementos de una línea por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número. En nuestro caso, cada una de las cuatro líneas (filas o columnas) se multiplica por tres, luego el determinante quedará multiplicado por 3^4: $|3A| = 81.2 = 162$

3) $$\begin{vmatrix} 2F_1 + F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 + F_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_2 \\ -F_2 \\ 3F_4 \\ F_1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 6 \cdot 2 = 12$$

2. *Hallar a, b y c para que la función f definida en todo número real y dada por* $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ *sea continua y derivable en todo x real y además alcance un extremo relativo para x = 3* [1,5 puntos]. *Representar gráficamente la función f', analizando su continuidad y derivabilidad* [1 punto].

SOLUCIÓN.

Puesto que las funciones definidas a la izquierda y a la derecha de x = 2 son continuas, basta exigir que lo sea en x = 2 y para ello debe ser $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} (x-1) = \lim_{x \to 2} (ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow 1 = 4a + 2b + c$ (*)

$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ 2ax + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Para que la función sea derivable en x = 2 debe ser: $f'(2^-) = f'(2^+) \Leftrightarrow 1 = 4a + b$ (*)

Para que la función tenga un extremo relativo en x = 3 debe ser $f'(3) = 0 \Rightarrow 6a + b = 0$ (*)

De las tres condiciones (*) se sigue: $\begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ 4a + b = 1 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a - b = -1 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}\ ,\ b = 3\ ,\ c = -3$

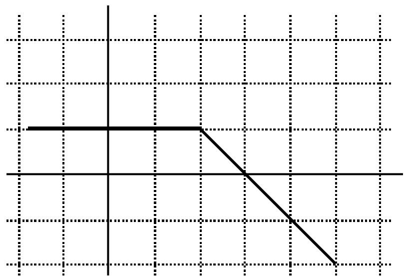
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

La función es continua y derivable $\forall x \neq 2$ por tratarse de funciones polinómicas. Veamos lo que ocurre en x = 2:

Continuidad: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 = f(2) \Rightarrow$ la función es continua.

Derivabilidad: $f''(2^-) = 0\ ,\ f''(2^+) = -1 \Rightarrow$ la función no es derivable en x = 2

Su gráfica es:



3. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Puesto que

$$\begin{array}{r|l} x^2\ !\ x + 1 & x^2\ !\ x\ !\ 2 \\ \hline !x^2\ + x + 2 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Se tiene: $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx = \int \left(1 + \frac{3}{x^2 - x - 2}\right) dx = x + \int \frac{3}{x^2 - x - 2}\,dx = (1)$

Por otra parte: $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = -1\ ,\ 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x + 1)\cdot(x - 2) \Rightarrow$

$$\frac{3}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{(x + 1)\cdot(x - 2)} = \frac{(A + B)x + (-2A + B)}{x^2 - x - 2} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A - B = 0 \\ -2A + B = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-3A = 3 \Rightarrow A = -1\ ,\ B = 1 \Rightarrow \int \frac{3}{x^2 - x - 2}\,dx = \int \frac{-1}{x + 1}\,dx + \int \frac{1}{x - 2}\,dx = -\ln|x + 1| + \ln|x - 2| = \ln\left|\frac{x - 2}{x + 1}\right|$$

y por tanto: $(1) = x + \ln\left|\dfrac{x - 2}{x + 1}\right| + C$

4. *Hallar el valor del parámetro m para que las rectas r y s dadas por:*

$$r: \frac{x+5}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2} \qquad s: \frac{x-m}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

se corten [1,5 puntos]. *Encontrar entonces el punto de intersección* [1 punto]

SOLUCIÓN.

Un punto de r es: $A(-5,\ 1,\ -1)$, y un vector direccional: $\overline{u} = (-3,\ 2,\ 2)$
Un punto de s es: $B(m,\ 0,\ 1)$, y un vector direccional: $\overline{v} = (-1,\ 4,\ 2)$

Las dos rectas se cortarán cuando los vectores $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{AB}$ sean linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ m+5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff -24+2+4m+20-8m-40+4-6 = -4m-44 = 0 \Rightarrow m = -11$$

Para obtener el punto de corte, podemos proceder así:

la recta r en paramétricas es $\begin{cases} x = -5-3t \\ y = 1+2t \\ z = -1+2t \end{cases}$ luego un punto cualquiera de r es $(-5-3t,\ 1+2t,\ -1+2t)$. Veamos cuál debe ser el valor de t para que este punto pertenezca a la recta s (con $m = -11$):

$$\frac{-5-3t+11}{-1} = \frac{1+2t}{4} = \frac{-1+2t-1}{2} \iff \begin{cases} -6+3t = \dfrac{1+2t}{4} \Rightarrow -24+12t = 1+2t \Rightarrow 10t = 25 \Rightarrow t = \dfrac{25}{10} = \dfrac{5}{2} \\ -6+3t = -1+t \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Luego el punto común de ambas rectas es: $\left(-5-\dfrac{15}{2}\ ,\ 1+5\ ,\ -1+5\right) = \left(-\dfrac{25}{2}\ ,\ 6\ ,\ 4\right)$