OPCIÓN A

1. Hallar los valores del parámetro *a* para que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+z=0 \\ ax+y+z=0 \\ x+(a-1)y+az=0 \end{cases}$ admita infinitas soluciones [1,5 puntos]. Resolverlo en cada uno de esos casos [1 punto].

SOLUCIÓN.

X El sistema homogéneo tiene infinitas soluciones cuando la matriz de los coeficientes tenga rango <3 y para ello:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{a}+a^2-\cancel{a}-\cancel{1}-a+\cancel{1}=0 \quad \Rightarrow \quad a^2-a=0 \quad \Rightarrow \quad a\left(a-1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a=0} \ , \ \boxed{a=1}$$

X Para $a=0$: como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ las dos primeras ecuaciones son independientes respecto a las incógnitas x e y. Considerando $z=\lambda$ como un parámetro: $\begin{cases} x=-\lambda \\ y=-\lambda \end{cases}$ luego las soluciones son: $\boxed{x=-\lambda \ , \ y=-\lambda \ , \ z=\lambda}$

X Para $a=1$: como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ las dos primeras ecuaciones son independientes respecto a x e y. Considerando $z=\mu$ como un parámetro: $\begin{cases} x=-\mu \\ x+y=-\mu \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-\mu \ , \ y=0 \ , \ z=\mu}$

2. Comprobar que todas las funciones $f(x) = 3x^5 + 10x^3 + ax + b$ tienen un único punto de inflexión [1 punto]. Hallar *a* y *b* para que la tangente a la gráfica de dicha función en el punto de inflexión sea la recta $y = x + 2$ [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

X $f'(x)=15x^4+30x^2+a \quad \Rightarrow \quad f''(x)=60x^3+60x=0 \quad \Rightarrow \quad 60x\left(x^2+1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$ (posible pto. de inflexión)

y como $f'''(x)=180x^2+60 \quad \Rightarrow \quad f'''(0)=60\neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ tiene un solo punto de inflexión en $x=0$: $\left(0\,,b\right)$

X La pendiente de la recta tangente es: $f'(0)=a$ y su ecuación: $y-b=a\left(x-0\right) \quad \Leftrightarrow \quad y=ax+b$ e identificándola con la recta dada: $\boxed{a=1 \ , \ b=2}$

3. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = ∗\, x\, ∗$ y $f(x) = x^2 - 2$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

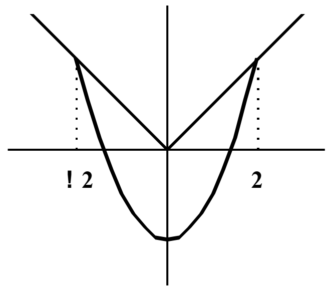
La primera función está definida así: $f(x)=\left|\,x\,\right|=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ y su gráfica está formada por las bisectrices del segundo y del primer cuadrantes.

La gráfica de la segunda función es una parábola. Obtengamos el vértice:

$f'(x) = 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ y como $f''(x) = 2 > 0 \;\Rightarrow\;$ El vértice (mínimo relativo) es el punto $(0\,,-2)$.

Además pasa por los puntos $(-2\,,2)$ y $(2\,,2)$.

Tenemos:



Como el recinto es simétrico respecto al eje de ordenadas, obtengamos el área del recinto entre $x = 0$ y $x = 2$:

$$S = \int_0^2 \left[x - x^2 + 2\right] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - 0 = -\frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3}$$

Por tanto, el área de todo el recinto es: $S = \frac{20}{3}\ u^2$

4. Lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos $(2,2)$ y $(6,0)$ [1,5 puntos]. Entre todas éstas escribir la ecuación de la que tiene radio mínimo [1 punto].

SOLUCIÓN.

Sea $C(x\,,y)$ el centro de dichas circunferencias: $(X - x)^2 + (Y - y)^2 = r^2$.

Como pasa por el punto $(2\,,2)$:

$$(2 - x)^2 + (2 - y)^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; 4 - 4x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = r^2 \quad (*)$$

Como pasa por el punto $(6\,,0)$:

$$(6 - x)^2 + (0 - y)^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; 36 - 12x + x^2 + y^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 - 12x + 36 = r^2 \quad (*)$$

Igualando las expresiones (*):

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4x - 4y + 8 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 12x + 36 \;\Leftrightarrow\; 8x - 4y - 28 = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{2x - y - 7 = 0}$$ que es una recta.

X El centro de las circunferencias es $C(x\,,2x - 7)$ y el radio es la distancia de C al punto $(6\,,0)$:

$$r = \sqrt{(x - 6)^2 + (2x - 7)^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 4x^2 - 28x + 49} = \sqrt{5x^2 - 40x + 85}$$

Veamos cuándo el radio es mínimo: $$r' = \frac{10x - 40}{2\sqrt{5x^2 - 40x + 85}} = \frac{5x - 20}{\sqrt{5x^2 - 40x + 85}} = 0 \;\Rightarrow\; x = 4$$

$$r'' = \frac{5\sqrt{5x^2 - 40x + 85} - (5x - 20)\dfrac{10x - 40}{2\sqrt{5x^2 - 40x + 85}}}{5x^2 - 40x + 85} \;\Rightarrow\; r''(4) > 0 \;\Rightarrow\;$$ el radio es mínimo para $x = 4$.

El centro es $C(4\,,1)$ y el radio $r = \sqrt{80 - 160 + 85} = \sqrt{5}$ y, por tanto, la circunferencia:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 5 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0}$$

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices 2H2 X tales que X A = X [1 punto] y todas las matrices Y tales que Y A = B [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

X Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$XA = X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2a+2b & -2a-3b \\ 2c+2d & -2c-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a+2b = a & \Rightarrow \quad a = -2b \\ -2a-3b = b & \Rightarrow \quad b = b \\ 2c+2d = c & \Rightarrow \quad c = -2d \\ -2c-3d = d & \Rightarrow \quad d = d \end{cases}$$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda \\ -2\mu & \mu \end{pmatrix}}$

X $Y\,A = B \quad \Rightarrow \quad Y = B \cdot A^{-1}$

Calculemos A^{-1} : $\quad |\,A\,| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6+4 = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \to \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathrm{Adj}\left(A^t\right) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\left(A^t\right)}{|\,A\,|} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $\quad Y = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix}}$

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ se pide:

a) Asíntotas de la curva y = f(x) [0,5 puntos]
b) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento [1,5 puntos]
c) Dibujar la gráfica [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

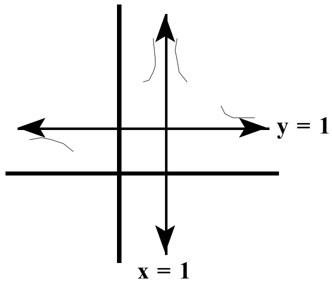
a) X Asíntotas verticales: $x = 1$ pues $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \infty$. Además: $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty$

X Asíntotas horizontales u oblicuas:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x^2-2x+1 \\ \hline -x^2+2x-1 & 1 \\ \hline \quad 2x-1 & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad f(x) = 1 + \frac{2x-1}{x^2-2x+1} \quad \Rightarrow$$

$y = 1$ es una asíntota horizontal de la función

Además: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 0^-$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 0^+$. Se tiene entonces:



b) $f'(x) = \dfrac{2x\,(x-1)^2 - x^2\, 2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2x\,(x-1)\left(\cancel{x}-1-\cancel{x}\right)}{(x-1)^4} = -\dfrac{2x}{(x-1)^3} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ (punto crítico)

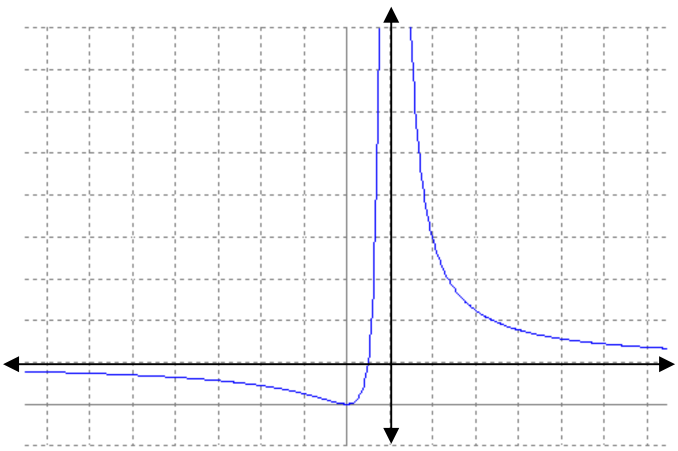
$f''(x) = -\dfrac{2\,(x-1)^3 - 2x\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \dfrac{-2\,(x-1)^2\,(x-1+3x)}{(x-1)^6} = \dfrac{-2\,(4x-1)}{(x-1)^4} \;\Rightarrow\; f''(0) > 0 \;\Rightarrow$ En $x = 0$ la función tiene un mínimo relativo: $(0\,,0)$

X Intervalos de crecimiento y decrecimiento: $f'(x)$ cambia de signo en $x = 0$ y en $x = 1$:

f' < 0	f' > 0	f' < 0
	0	1

Luego la función es decreciente en $(-\infty\,,0)\cup(1\,,+\infty)$ y creciente en $(0\,,1)$

c)



3. Hallar los puntos de la curva $x^2 - y^2 = 1$ más próximos al punto de coordenadas (4 , 0) [2 puntos]. ¿Cómo se llama dicha curva?, dibujarla [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

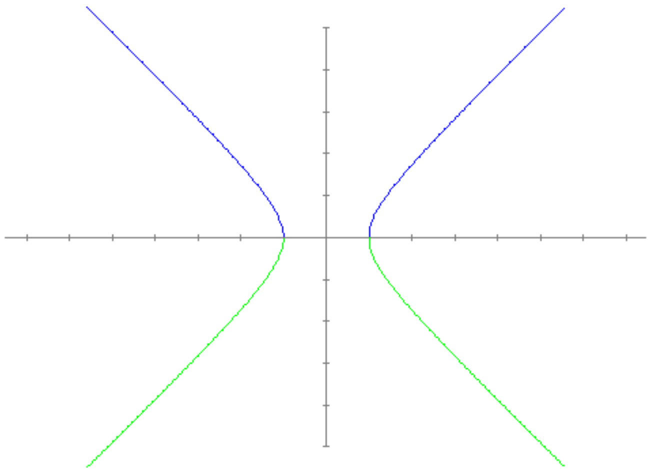
$x^2 - y^2 = 1 \;\Rightarrow\; y = \sqrt{x^2-1}$ luego los puntos de la curva son $\left(x\,,\sqrt{x^2-1}\right)$. La distancia al punto $(4\,,0)$ es:

$d = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\sqrt{x^2-1}-0\right)^2} = \sqrt{x^2-8x+16+x^2-1} = \sqrt{2x^2-8x+15}$. Veamos cuándo es mínima esta distancia:

$$d' = \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+15}} = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-8x+15}} = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$$

y como $d'' = \dfrac{2\sqrt{2x^2-8x+15} - (2x-4)\dfrac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+15}}}{2x^2-8x+15} \;\Rightarrow\; d''(2) > 0 \;\Rightarrow$ Para $x = 2$ la distancia es mínima. Por tanto, los puntos buscados son: $\left(2\,,\sqrt{3}\right)$ y $\left(2\,,-\sqrt{3}\right)$

X La curva es una hipérbola: $a=1\;,\;b=1\;\Rightarrow\;c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$ luego los focos son los puntos $\left(-\sqrt{2}\,,0\right)$ y $\left(\sqrt{2}\,,0\right)$. Las asíntotas son las rectas: $y=x$ e $y=-x$.



4. Hallar el punto (o puntos) P de la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=1 \\ y=2+2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ que con los puntos A (1,1,1) y B (3,1, !1) forman un triángulo isósceles de lados iguales AP y BP [1,5 puntos]. Hallar también el área de dichos triángulos [1 punto].

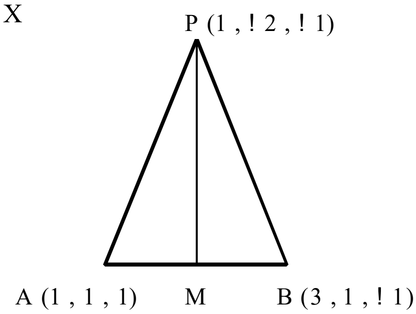
SOLUCIÓN.

Sea $P\left(1\,,2+2\lambda\,,1+\lambda\right)$.

$$d\left(A\,,P\right)=d\left(B\,,P\right)\;\Rightarrow\;\sqrt{(1-1)^2+(2+2\lambda-1)^2+(1+\lambda-1)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(2+2\lambda-1)^2+(1+\lambda+1)^2}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\cancel{4\lambda^2}+\cancel{4\lambda}+\cancel{1}+\cancel{\lambda^2}=4+\cancel{4\lambda^2}+\cancel{4\lambda}+\cancel{1}+\cancel{\lambda^2}+4\lambda+4\;\Rightarrow\;4\lambda+8=0\;\Rightarrow\;\lambda=-2\;\Rightarrow\;\boxed{P\left(1\,,-2\,,-1\right)}$$

X



$$b=d\left(A\,,B\right)=\sqrt{(3-1)^2+(1-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Coordenadas del punto medio de AB: $M\left(2\,,1\,,0\right)$

luego: $h=d\left(P\,,M\right)=\sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{11}$

y por tanto: $S=\dfrac{1}{2}\,2\sqrt{2}\,\sqrt{11}=\boxed{\sqrt{22}\;u^2}$