# GEOMETRÍA

**Junio 94.**

**1.** Sin resolver el sistema, determina si la recta 2x – 3y + 1 = 0 es exterior, secante ó tangente a la circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2=1$. Razónalo. [1,5 puntos]

**2.** Dadas las ecuaciones de los tres planos: 2x – y + z = 3, x – y + z = 2 , 3x – y + az = b , hallar los valores de *a* y *b* para que se corten en una recta r. Calcular r. [2,5 puntos]

| |
|---|
| **SOLUCIÓN.**<br>**1.** La recta es secante a la circunferencia. **2.** a = 1 , b = 4. |

**Junio 94.** Dados los puntos A (1,3,5) y B (–2,4,1), hallar las coordenadas de un punto C, perteneciente al plano XY de forma que A, B y C estén alineados. [1,5 puntos]

| |
|---|
| **SOLUCIÓN.**<br>$C\left(-\frac{11}{4},\frac{17}{4},0\right)$ |

**Septiembre 94.**

**1.** Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al plano $\pi_1$: 3x – 3z + 1 = 0 es el doble de la distancia al plano $\pi_2$: x + y – 1 = 0. Razónalo. [1,5 puntos]

**2.** Determinar la posición relativa del plano $\alpha x + 2y - 6z + 7 = 0$ y de la recta $\frac{x}{6}=\frac{y+1}{\alpha}=\frac{z-\alpha}{4}$ según los valores del parámetro $\alpha$. [2,5 puntos]

| |
|---|
| **SOLUCIÓN.**<br>**1.** Dos planos: $\pi\equiv 3x+6y+3z-7=0$ , $\pi'\equiv 9x+6y-3z-5=0$<br>**2.** ‣ Si $\alpha=3$ : la recta es paralela al plano. ‣ Si $\alpha\neq 3$: la recta corta al plano en un punto |

**Septiembre 94.** Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto M (1,0,–2) y es perpendicular a la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{-1}$ [1,5 puntos]

| |
|---|
| **SOLUCIÓN.**<br>$2x-y-z-4=0$ |

**Junio 95.** Encontrar los valores de $\alpha$ y $\beta$ para que los cuatro puntos A (0,–1) , B (2,0) , C (1, $\beta$) , D ($\alpha$,–2) formen un paralelogramo. Calcular su área. [1,5 puntos]

| |
|---|
| **SOLUCIÓN.**<br>$\alpha=\beta=-1$ ; S = 1 $u^2$ |

**Junio 95.**

**1.** Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores en el plano. Demostrar que si los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ tienen el mismo módulo, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales. [1,5 puntos]

**2.** De todos los planos que contienen a la recta r: $\begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ escribir la ecuación del que pasa por el punto P $(0,0,0)$. [1,5 puntos]

> **SOLUCIÓN.**
> **1.** Calcula $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$ e iguálalos. **2.** $2x+3y+z=0$

**Septiembre 95.** Encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancia a los puntos A $(-4,0)$ y B $(4,0)$ es 4. ¿Cómo se llama esta curva?. La ecuación obtenida ¿está en forma reducida? [1,5 puntos]

> **SOLUCIÓN.**
> $3x^2+y^2-12=0$. Es una hipérbola. La ecuación no está en forma reducida.

**Septiembre 95.**

**1.** Usando vectores, averiguar si los puntos A $(1,0,2)$, B $(0,4,0)$, C $(2,1,-1)$ y D $(1,1,1)$ son coplanarios o no lo son. [1,5 puntos]

**2.** Calcular los valores de $\alpha$ para los que el plano $\pi:\ \alpha^2x-2y-2z=\alpha+5$ es paralelo a la recta $r:\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3y+2z=-1 \end{cases}$ Averiguar si existe algún valor de $\alpha$ para el que la recta r está contenida en el plano $\pi$. [2 puntos]

> **SOLUCIÓN.**
> **1.** Los cuatro puntos son coplanarios. **2.** $\alpha=\pm\sqrt{2}$. $\nexists\alpha$ para el que $r\subset\pi$.

**Junio 96.**

**1.** ¿Para qué valores de k la ecuación $r:\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{16-k}=1$ representa una elipse?. Comprobar que todas esas elipses tienen los mismos focos. [1,5 puntos]

**2.** Utilizando las propiedades de dependencia e independencia lineal de vectores, averiguar la posición relativa de la recta r determinada por los puntos A $(1,0,-1)$ y B $(2,1,0)$ y la recta s determinada por C $(4,1,1)$ y D $(3,0,0)$. [1,5 puntos]

> **SOLUCIÓN.**
> **1.** k < 16. Focos: F $(3,0)$ y F' $(-3,0)$ **2.** r y s son paralelas.

**Junio 96.**

**1.** Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene centro $(1,4)$ y es tangente a la recta $3x + 4y - 4 = 0$. [1,5 puntos]

**2.** Encontrar el punto de intersección de la recta $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ con el plano $\pi$ perpendicular a r que pasa por el origen de coordenadas. [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**

**1.** $x^2+y^2-2x-8y+8=0$ **2.** $\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$

**Septiembre 96.**

**1.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $(0,6)$ y del eje de abscisas. ¿Cómo se llama esta figura?. [1,5 puntos]

**2.** Dados el punto A $(2,1,1)$ y el plano $\pi$ de ecuación $x - y + z = 0$, hallar el punto de intersección de $\pi$ con la recta que pasa por A y es perpendicular a $\pi$. [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**

**1.** $x^2-12y+36=0$. Es una parábola. **2.** $\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$

**Septiembre 96.**

**1.** Determinar el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $(0,0)$, $(0,2)$ y $(2,4)$. [1,5 puntos]

**2.** Utilizando las propiedades de dependencia e independencia lineal de vectores, deducir la posición relativa de la recta r determinada por los puntos A $(1,1,0)$ y B $(2,2,1)$ y la recta s determinada por los puntos C $(3,1,2)$ y D $(3,-1,2)$ [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**

**1.** $C(3,1)$. $r=\sqrt{10}$. **2.** r y s se cortan.

**Junio 97.**

**1.** Sea $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ una base ortonormal, hallar todos los vectores que son ortogonales a $\vec{u}$ y a $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$ que tengan módulo 1. [1,5 puntos]

**2.** Nos dan la recta r determinada por los puntos A $(2,1,1)$ y B $(0,-1,-1)$ y la recta s determinada por los puntos C $(1,2,-1)$ y D $(1,4,-2)$. Razonar su posición relativa. [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**

**1.** $\vec{x}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\vec{x}=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **2.** r y s se cortan.

**Junio 97.**

**1.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(6,0)$ y $(0,4)$ y que tiene el centro en la recta $x - y = 0$. [1,5 puntos]

**2.** Hallar el punto P de la recta r de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1 \end{cases}$ que con los puntos A $(1,1,1)$ y B $(3,1,0)$ forma un triángulo rectángulo de hipotenusa BP. [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
**1.** $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 26$ **2.** P $(1,0,1)$

**Septiembre 97.**

**1.** Hallar, en función del parámetro positivo a, la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + y^2 = a$ y la recta de ecuación $y = x$. [1,5 puntos]

**2.** Hallar el punto de la recta $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$ más próximo al punto A $(0,-1,1)$ [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
**1.** ‣ Si a = 2: la recta es tangente a la circunferencia. ‣ Si a < 2: la recta es exterior a la circunferencia
‣ Si a > 2: la recta es secante a la circunferencia
**2.** El propio punto A $(0,-1,1)$

**Septiembre 97.**

**1.** Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de los cuadrados de las distancias de P a A $(0,0)$ y a B $(2,0)$ es 4. ¿Qué figura representa esta ecuación? [1,5 puntos]

**2.** Hallar el punto del eje OY que es coplanario con los puntos P $(1,1,1)$, Q $(2,2,1)$ y R $(1,2,0)$. [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
**1.** $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Es una circunferencia. **2.** $(0,-1,0)$

**Junio 98.** Hallar el punto simétrico del punto A $(-1,3,3)$ respecto al plano $\pi$ de ecuación general $x + y - 2z = 5$. [2,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
A' $(2,6,-3)$

**Junio 98.** Nos dan los vectores $\vec{a} = (1,0,-1)$, $\vec{b} = (0,2,-1)$ y $\vec{c} = (2,0,0)$, hallar:

i) Valor absoluto del producto mixto de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y dar su significado geométrico. [1 punto]
ii) Ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$. [0,5 puntos]
iii) Razonar si ( $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ) forman base y, en caso afirmativo, hallar las coordenadas de $(1,-2,0)$ en dicha base. [1 punto]

**SOLUCIÓN.**
i) 4. Volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.
ii) $\alpha = 90^\circ$. $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son perpendiculares.
iii) Sí forman base. Coordenadas: $(1,-1,0)$

**Septiembre 98.** Lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos $(2,2)$ y $(6,0)$ [1,5 puntos]. Entre todas éstas escribir la ecuación de la que tiene radio mínimo [1 punto].

**SOLUCIÓN.**
$2x-y-7=0$. $x^2+y^2-8x-2y+12=0$

**Septiembre 98.** Hallar el punto (o puntos) P de la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=1 \\ y=2+2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ que con los puntos $A(1,1,1)$ y $B(3,1,-1)$ forman un triángulo isósceles de lados iguales AP y BP [1,5 puntos]. Hallar también el área de dichos triángulos [1 punto].

**SOLUCIÓN.**
$P(1,-2,-1)$. $S=\sqrt{22}\ u^2$

**Junio 99.** Nos dan la recta r determinada por los puntos A $(1,1,1)$ y B $(3,1,2)$ y la recta s dada por $\begin{cases} x-2z-1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$. Se pide:

i) Averiguar su posición relativa. [1 punto]
ii) Si existe, hallar la ecuación general del plano que las contiene. [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
i) r y s son paralelas. ii) $x-2y-2z+3=0$

**Junio 99.** Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene centro C $(-1,1)$ y es tangente a la recta 3x – 4y – 3 = 0 [1 punto]. De todas las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, encontrar las que sean tangentes a esta circunferencia [1,5 puntos].

**SOLUCIÓN.**
$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ ; $x-y+2\sqrt{2}+2=0$, $x-y+2-2\sqrt{2}=0$

**Septiembre 99.** Se sabe que el producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ vale 3 y que el módulo del vector $\vec{v}\times\vec{w}$ es 1. Se pide:

i) Hallar razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D sabiendo que $\vec{AB}=\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{AC}=\vec{w}$ y $\vec{AD}=\vec{w}+2\vec{v}$ [1,5 puntos].
ii) Hallar razonadamente la longitud de la altura de dicho tetraedro que une el vértice B con la cara ACD [1 punto]

**SOLUCIÓN.**
i) $V = 1\ u^3$ ii) $h = 3\ u$

**Septiembre 99.** Dadas la recta $r: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-2y+2z+4=0 \end{cases}$ y la recta s determinada por los puntos P $(1,2,0)$ y Q $(a,a,1)$, se pide hallar a para que estas rectas estén contenidas en un plano [1,5 puntos]. Escribir la ecuación general de dicho plano [1 punto]

**SOLUCIÓN.**
a = 3 ; $x-5y+3z+9=0$

**Junio 00.** Dada la recta r de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=1 \end{cases}$ y los puntos P $(1,1,2)$ y Q $(1,-1,2)$, se pide:
1) Encontrar la posición relativa de r y la recta determinada por P y Q [1,5 puntos]
2) Hallar el punto o puntos R de r para los que el triángulo PQR es isósceles de lados iguales PR y QR [1 punto].

**SOLUCIÓN.**
1) r y s se cruzan. 2) R $(1,0,1)$

**Junio 00.** Suponer que el plano coordenado z = 0 es un espejo (reflectante en ambas caras). Desde el punto A $(3,2,4)$ se emite un rayo de luz, que reflejándose en este espejo, ilumina el punto B $(0,-1,2)$.
1) ¿En qué punto del espejo debe incidir el citado rayo? [1,5 puntos]
2) Hallar la ecuación general del plano que contiene a los rayos incidente y reflejado. [1 punto]

**SOLUCIÓN.**
1) Dos puntos: P $(1,0,0)$ , Q $(-3,-4,0)$ 2) $x-y-1=0$

**Septiembre 00.** Hallar la ecuación de la circunferencia C que pasa por los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$ y es tangente a la recta r: y = 3x + 2 [1,5 puntos]. En el haz de rectas paralelas a r hay otra tangente a C, hallar su ecuación. [1 punto]

**SOLUCIÓN.**
$x^2+y^2-12x-4=0$ ; y = 3x − 38

**Septiembre 00.** Hallar el valor del parámetro m para que las rectas r y s dadas por:

$$r: \frac{x+5}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2} \qquad s: \frac{x-m}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{2}$$

se corten [1,5 puntos]. Encontrar entonces el punto de intersección [1 punto]

**SOLUCIÓN.**
m = −11 ; $\left(-\frac{25}{2}, 6, 4\right)$

**Junio 01.** Sean r la recta determinada por los puntos A $(1,0,-1)$ y B $(1,\ -1,\ -1)$ y s la recta de ecuaciones $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{3}$. Se pide:

a) Averiguar su posición relativa [1 punto]

b) Hallar, si existe, una recta que pase por el punto C $(1,2,4)$ y que corte a las rectas r y s [1,5 puntos]

> **SOLUCIÓN.**
> a) r y s se cruzan. b) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{1}$

**Junio 01.** Dados los puntos: A $(1,0,0)$, B $(0,\ -1,0)$ y C $(0,0,3)$, se pide:

a) Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de A, B y C, indicando qué figura forman [1,5 puntos].

b) Hallar las coordenadas del centro de la circunferencia que pasa por esos puntos [1 punto]

> **SOLUCIÓN.**
> a) Es una recta: $\begin{cases} x+y=0 \\ x-3z+4=0 \end{cases}$ b) $\left(\frac{5}{19},-\frac{5}{19},\frac{27}{19}\right)$

**Septiembre 01.** Dados los puntos A $(1,1,1)$, B $(-1,3,1)$, C $(1,0,0)$ y D $(0,2,0)$, se pide hallar el punto P perteneciente a la recta determinada por A y B tal que el triángulo CDP sea rectángulo con hipotenusa CP. [2,5 puntos]

> **SOLUCIÓN.**
> P $(0,2,1)$

**Septiembre 01.** Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje OX en el punto $(4,0)$ y pasa por el punto $\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$ [1,5 puntos]. Hallar la ecuación de la otra tangente a esta circunferencia que pasa por el origen de coordenadas [1 punto].

> **SOLUCIÓN.**
> $x^2+y^2-8x-6y+16=0$ ; $24x-7y=0$

**Junio 02.** La recta $\begin{cases} x+y=1 \\ \lambda y+z=1 \end{cases}$ corta en P y Q respectivamente a los planos y = 0 y x = 0.

a) Determina los puntos (si los hay) en el eje OZ que equidisten de P y Q. Naturalmente estos posibles puntos dependen del valor de $\lambda$. [1,3 puntos]

b) Determina $\lambda$ para que además los puntos del eje OZ formen con P y Q un triángulo equilátero. [1,2 puntos]

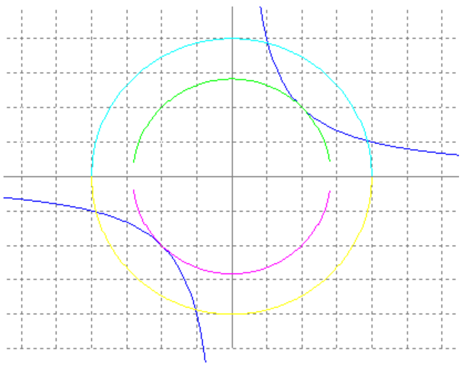
> **SOLUCIÓN.**
> a) Si $\lambda=0$: cualquier punto de OZ. Si $\lambda\neq 0$: $\left(0,0,\frac{2-\lambda}{2}\right)$
> b) Si $\lambda=0$: $(0,0,2)$ y $(0,0,0)$. Si $\lambda\neq 0$: Ningún punto de OZ verifica la condición.

**Junio 02.** Sabemos que en el plano el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de dos dados es una recta. Pues bien, ocurre que si en lugar de pedir que el cociente de las distancias sea 1, elegimos otro valor fijo, el lugar geométrico pasa a ser una circunferencia.
a) Comprueba esta afirmación tomando como puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ y un parámetro $\lambda$ como cociente de las distancias. [1 punto]
b) Da una expresión del centro y del radio de la circunferencia del apartado a) en función de $\lambda$. [1 punto]
c) Representa la figura para $\lambda = 2$. [0,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
a) $x^2 + y^2 + \dfrac{2}{1-\lambda}x + 1 = 0$ b) $C\left(\dfrac{1}{\lambda - 1}, 0\right)$ , $r = \dfrac{\sqrt{\lambda(2-\lambda)}}{1-\lambda}$ c) Se trata de una circunferencia de radio 0.

**Septiembre 02.** Sea H la hipérbola de ecuación $xy = 4$. Sean $C_1$ y $C_2$ dos circunferencias, ambas con centro el origen de coordenadas y tales que
a) $C_1$ es tangente a la hipérbola.
b) $C_2$ corta a la hipérbola H en un punto de abscisa 1.
Representa gráficamente las tres cónicas anteriores [1 punto] y calcula el área de la corona circular encerrada entre las dos circunferencias [1,5 puntos].

**SOLUCIÓN.**



$S = 9\pi\ u^2$

**Septiembre 02.** a) Halla razonadamente la ecuación del lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos $(2,0)$ y $(0,1)$. [1 punto]
b) Entre todas estas circunferencias halla la ecuación de aquélla o aquéllas cuyo centro equidista de los ejes coordenados. [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
a) $4x - 2y - 3 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$

**Junio 03.** Sean los puntos $A(3,2)$ y $B(5,3)$. Calcular
a) Ecuación general de la circunferencia que pasa por el punto B y tiene su centro en A [1 punto]
b) Ecuación de la tangente a esta circunferencia en B [1 punto]
c) Área del triángulo formado por la tangente anterior y los ejes coordenados [0,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ b) $y = -2x + 13$ c) $42{,}25\ u^2$

**Junio 03.** Sean el plano $\pi: x-2y+4z=12$ y el punto $P(2,-1,1)$.
a) Calcular la distancia $\delta$ entre el plano $\pi$ y el punto P [0,5 puntos]
b) Hallar la ecuación de un plano paralelo a $\pi$ y distinto del mismo, que también diste de P la misma distancia $\delta$. [1,5 puntos].
c) Calcular el volumen de la figura limitada por el plano $\pi$ y los tres planos coordenados [0,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
a) $\delta = \dfrac{4\sqrt{21}}{21}$ b) $x - 2y + 4z - 4 = 0$ c) $36\ u^3$

**Septiembre 03.** Sea C una circunferencia cuyo centro es el punto (1 , 1) y que es tangente a los dos ejes coordenados.
a) Escribir su ecuación general [1 punto].
b) Determinar los puntos de C donde la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante [1,5 puntos].

**SOLUCIÓN.**
a) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ b) $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}, \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

**Septiembre 03.** Sea el triángulo de vértices A (4 , 2) , B (13 , 5) y C (6 , 6).
a) Hallar la ecuación de la altura que pasa por el vértice C [1,5 puntos]
b) Calcular la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado AB [1 punto]

**SOLUCIÓN.**
a) $h_C \equiv y=-3x+24$ b) $L_1=\sqrt{10}$ , $L_2=2\sqrt{10}$

**Junio 04.** Sean los puntos $A(2\ ,3\ ,0)$ y $B(-2\ ,1\ ,4)$. Determinar:
a) Ecuación del plano $\pi$ mediatriz del segmento AB [0,5 puntos].
b) El volumen del tetraedro formado por $\pi$ y los tres planos coordenados [1 punto].
c) Ecuación de la recta perpendicular al plano $\pi$ que pasa por el origen [1 punto]
*Nota*: El plano mediatriz de un segmento es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

**SOLUCIÓN.**
a) $2x + y - 2z + 2 = 0$ b) $V=\dfrac{1}{3}\ u^3$ c) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$

**Junio 04.** Sea el plano $\pi$ de ecuación $x - 5y + z + 3 = 0$ y sean *r* y *s* las rectas con ecuaciones

$$r:\ x-3=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{3} \quad ; \quad s:\ \frac{x+1}{2}=y=z+2$$

Determinar:
a) Los puntos de intersección del plano $\pi$ con cada una de las rectas [1 punto].

b) El área y perímetro del triángulo formado por los dos puntos anteriores y el origen de coordenadas [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
a) $\pi \cap r:\ (3,2,4)$ ; $\pi \cap s:\ (-1,0,-2)$ b) $S=\sqrt{6}\ u^2$ ; $P=\sqrt{5}+\sqrt{29}+\sqrt{56}\approx 15{,}1\ u$

**Septiembre 04.** La recta $x=\frac{1-y}{3}=\frac{2-z}{2}$ corta a los tres planos coordenados en tres puntos. Determinar las coordenadas de estos puntos [0,5 puntos], las distancias existentes entre cada par de ellos [1 punto] e indicar cuál es el que se encuentra en medio de los otros dos [1 punto].

**SOLUCIÓN.**
$A(0,1,2)$, $B\left(\frac{1}{3},0,\frac{4}{3}\right)$, $C(1,-2,0)$ ; $d(A,B)=\frac{\sqrt{14}}{3}$ , $d(A,C)=\sqrt{14}$ , $d(B,C)=\frac{2\sqrt{14}}{3}$
Como $d(A,B)+d(B,C)=d(A,C)$ $\Rightarrow$ B se encuentra entre A y C.

**Septiembre 04.** Sea r la recta que pasa por los puntos $(1,2,3)$ y $(-1,0,2)$.
a) Determinar las ecuaciones de los planos $\pi$ y $\sigma$ que son perpendiculares a la recta r y que pasan respectivamente por los puntos $(4,-2,-1)$ y $(2,-1,-3)$ [1,5 puntos]
b) Calcular la distancia que hay entre ambos planos $\pi$ y $\sigma$ [1 punto]

**SOLUCIÓN.**
a) $\pi \equiv 2x+2y+z-3=0$ ; $\sigma \equiv 2x+2y+z+1=0$ b) $d(\pi,\sigma)=\frac{4}{3}\ u$

**Junio 05.** Escribir la ecuación de la circunferencia con centro $(2,-1)$ y cuyo radio es 3, y luego determinar los puntos de esta circunferencia que equidistan de los ejes. [2,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
$x^2+y^2-4x+2y-4=0$ ; $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2},\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$ , $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2},\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$

**Junio 05.** Sea el plano $\pi: 2x-3y+z=1$ y el punto $A=(5,-5,4)$.
a) Determinar el punto simétrico de A respecto de $\pi$. [1,5 puntos]
b) Volumen de la figura del espacio limitada por el plano $\pi$ y los tres planos cartesianos. [1 punto]

**SOLUCIÓN.**
a) $A'(-3,7,0)$ b) $\frac{1}{36}\ u^3$

**Septiembre 05.** Determinar el punto simétrico del $(3,-8,4)$ respecto del plano $x-3y+2z=7$ [2,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
$A'(-1,4,-4)$

**Septiembre 05.** Sea *r* la recta intersección de los dos planos $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

a) Determinar el plano $\pi$ que contiene a la recta *r* y que pasa por el origen de coordenadas [1,5 puntos]
b) Escribir la ecuación de la recta perpendicular a $\pi$ y que pasa por el punto $(1,0,1)$ [1 punto]

**SOLUCIÓN.**
a) $\pi \equiv -5x+5y-4z=0$ b) $\frac{x-1}{-5}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{-4}$

**Junio 06.** Calcular la distancia entre las rectas r y s, donde $r: \begin{cases} x=2+2k \\ y=1-k \\ z=3+k \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=-1+k \\ y=-1+3k \\ z=4-2k \end{cases}$

**SOLUCIÓN.**
$d(r,s)=0$

**Junio 06.** a) Estudiar si son linealmente independientes los vectores $\vec{a}=(3,1,2)$, $\vec{b}=(0,1,1)$ y $\vec{c}=(1,1,1)$. Expresar el vector $\vec{v}=(0,0,1)$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. [1,5 puntos]
b) ¿Son el plano $\pi:\ 2x+3y+z+1=0$ y la recta $r:\ \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-3}=-z$ ortogonales?. Justificar la respuesta. [1 punto]

**SOLUCIÓN.**
a) Son linealmente independientes. $\vec{v}=\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$. b) El plano y la recta son ortogonales.

**Septiembre 06.** ¿Para qué valores del parámetro m la recta $x=y+1=\frac{11-mz}{3}$ es paralela al plano $2x+y+z=9$? Determinar el punto de intersección de la recta y el plano para m = 2. [2,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**
$m=1$ ; $(3,2,1)$

**Septiembre 06.** a) Estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores $\vec{u}=(2,0,9)$, $\vec{v}=(3,-1,2)$, $\vec{w}=(5,-1,4)$. [0,75 puntos]
b) Dados los planos: $\pi_1: 3x-y+2z+1=0$ y $\pi_2: 2x+y-5z-1=0$, determinar el ángulo que forman. [1,75 puntos]

**SOLUCIÓN.**
a) Son linealmente independientes b) $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{105}}{42} \cong 75º\ 52'\ 43''$

**Junio 07.** Escribir las ecuaciones implícitas de una recta con la dirección del vector $(1,-1,0)$ y que pasa por P' el simétrico de $P=(0\ ,\ -2\ ,\ 0)$ respecto al plano $\pi: x+3y+z=5$. [2,5 puntos]

> **SOLUCIÓN.**
> $\begin{cases} x+y-6=0 \\ z-2=0 \end{cases}$

**Junio 07.** a) Las componentes de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ en una cierta base de $V_3$ son: $\vec{u}=(2,0-1)$, $\vec{v}=(-3,1,2)$, $\vec{w}=(4,-2,7)$. Hallar, en esa misma base, las componentes del vector $2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{w}$. [0,75 puntos]

b) Determinar la posición relativa de las siguientes rectas: $r_1: \begin{cases} 7x+5y-7z-12=0 \\ 2x+3z+11=0 \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} 5x-5y-z-16=0 \\ 3x-2y-7=0 \end{cases}$

[1,75 puntos]

> **SOLUCIÓN.**
> a) $\left(\frac{25}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ b) $r_1$ y $r_2$ se cruzan.

**Septiembre 07.** Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$, $s \equiv x=y+4=2z-8$

a) Comprobar que se cortan. [1,5 puntos]
b) Hallar el ángulo que forman. [1 punto]

> **SOLUCIÓN.**
> a) Comprobar b) $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{6}}{18} \simeq 82º\, 10'\, 44''$

**Septiembre 07.** Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$ y el punto $P(1,2,3)$.

a) Calcular la ecuación del plano $\pi$ que es perpendicular a la recta r y contiene al punto P. [1,5 puntos]
b) Estudiar para qué valores de k los vectores $\{(1,-2,-1/2),(0,k,0),(0,0,2k)\}$ son linealmente independientes [1 punto]

> **SOLUCIÓN.**
> a) $\pi \equiv 4x-2y+z-3=0$ b) $\forall k \neq 0$

**Junio 08.**

**Opción A.** Considerar la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x+4y+4z=5$.

a) *(1 punto)* Estudiar la posición relativa de $r$ y $\pi$.
b) *(1,5 puntos)* Calcular la ecuación implícita de un plano $\pi_1$ que es perpendicular a $\pi$ y contiene a r.

**Opción B.** a) *(1,25 puntos)* Calcular la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z=3$. Obtener el punto de corte de la recta con el plano $\pi$.

b) *(1,25 puntos)* Hallar el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ cuya distancia al punto $P(1,0,2)$ sea $\sqrt{5}$.

| | | |
|---|---|---|
| **SOLUCIÓN.** | | |
| **Opción A.** | a) La recta es paralela al plano. | b) $2x-z-5=0$ |
| **Opción B.** | a) $x=y=z$. $(1,1,1)$ | b) $(1,2,3)$ |

**Septiembre 08.**

**Opción A.** Se consideran la recta r y los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases}, \quad \pi_1 \equiv 2-3x+2y-z=0 \ , \ \pi_2 \equiv 3+2x+2y-2z=0$$

a) *(1,25 puntos)* Determinar la posición relativa de los dos planos.

b) *(1,25 puntos)* Calcular la distancia de r a $\pi_2$.

**Opción B.** a) *(1 punto)* Obtener los valores de $\alpha$ y $\beta$ para los cuales el vector de componentes $(\alpha,\beta,0)$ tiene módulo $\sqrt{2}$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1 \end{cases}$.

b) *(0,75 puntos)* Estudiar si los vectores $\vec{a}=(3,1,2)$, $\vec{b}=(0,1,1)$, $\vec{c}=(0,1,-1)$ son linealmente independientes.

c) *(0,75 puntos)* Calcular el ángulo que forman dos rectas cuyos vectores direccionales son $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente.

| | | |
|---|---|---|
| **SOLUCIÓN.** | | |
| **Opción A.** | a) Secantes (son perpendiculares) | b) $d(r,\pi_2)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ |
| **Opción B.** | a) $\alpha=-1, \beta=1$ ó $\alpha=1, \beta=-1$ | b) Sí, son linealmente independientes. |
| | c) $90^{o}$ (las rectas son perpendiculares) | |

**Junio 09.**

**Opción A.** Sean los vectores $\vec{u}=(1,-1,3)$, $\vec{v}=(-2,2,1)$, $\vec{w}=(3,-2,5)$; calcular:

a) *(0,5 puntos)* $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$.

b) *(0,5 puntos)* $\vec{u}\times(\vec{v}-\vec{w})$.

c) *(0,75 puntos)* La ecuación del plano que pasa por el punto $P(0,0,1)$ y es perpendicular al vector $\vec{u}$.

d) *(0,75 puntos)* El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

**Opción B.** a) *(1 punto)* Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x-2y+z=0$ y $\pi_2 \equiv x-2y-z=3$.

b) *(1,5 puntos)* Considerar la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$. Analizar si el punto $P(6,2,2)$ se halla o no sobre la recta paralela a la anterior que pasa por el origen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **SOLUCIÓN.** | | | | |
| **Opción A.** | a) 19 | b) $(-8,-11,-1)$ | c) $x-y+3z-3=0$ | d) 95º 46' 5.45'' |
| **Opción B.** | a) Secantes | b) No | | |

**Septiembre 09.**

**Opción A.** a) *(1,5 puntos)* Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(5,0,1)$ y $B(4,1,0)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$.

b) *(1 punto)* Estudiar si los vectores $\vec{u}=(1,-1,1)$, $\vec{v}=(1,0,0)$ y $\vec{w}=(2,-2,1)$ son linealmente independientes.

**Opción B.** a) *(1,5 puntos)* Hallar el punto simétrico de $A(2,0,1)$ respecto del plano $\pi \equiv x+2y+z=2$.

b) *(1 punto)* Obtener las ecuaciones de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$ en forma paramétrica y en forma continua.

**SOLUCIÓN.**
**Opción A.** a) $2x+y-z-9=0$ b) Son linealmente independientes.

**Opción B.** a) $A'\left(\frac{11}{6},-\frac{1}{3},\frac{5}{6}\right)$ b) $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-5t \\ z=-1+3t \end{cases}$ ; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+1}{3}$

**Junio 10.** Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$ y $s \equiv x-1=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$

a) Justificar si son o no perpendiculares. *(1 punto)*
b) Calcular la distancia del punto $P(16,0,0)$ a la recta *r*. *(1,5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**
a) Sí que son perpendiculares. b) $d=\sqrt{\frac{629}{21}} \simeq 5{,}47$ u

**Junio 10.** a) Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(3,-2,2)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-y-z=0$. *(1,75 puntos)*

b) Estudiar si los vectores $\vec{a}=(1,-1,-1)$, $\vec{b}=(0,1,1)$, $\vec{c}=(0,0,1)$ son linealmente independientes. *(0,75 puntos)*

**SOLUCIÓN.**
a) $x+y+z-3=0$ b) Son linealmente independientes.

**Septiembre 10. a)** Calcular el plano determinado por los puntos $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. *(1 punto)*

**b)** Determinar el ángulo que forman los planos $\pi_1 \equiv \sqrt{2}x+y+z=2$ y $\pi_2 \equiv z=0$. *(0,75 puntos)*

**c)** Obtener el producto vectorial de $\vec{a}=(2\ ,\ 0\ ,\ 1)$ y $\vec{b}=(1\ ,\ -1\ ,\ 3)$. *(0,75 puntos)*

**SOLUCIÓN.**
a) $x+y+z-1=0$ b) $60^{\circ}$ c) $(1\ ,\ -5\ ,\ -2)$

**Septiembre 10.** Estudiar la posición relativa de la recta $r \equiv \frac{x+1}{3} = y-2 = \frac{z}{2}$ y el plano determinado por los puntos $A(1\ ,\ 3\ ,\ 2), B(2\ ,\ 0\ ,\ 1)$ y $C(1\ ,\ 4\ ,\ 3)$. ¿Son perpendiculares?. Hallar la distancia del punto $P\left(\frac{4}{5}\ ,\ \frac{13}{5}\ ,\ \frac{6}{5}\right)$ a la recta r. *(2,5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**
Se cortan en un punto. No son perpendiculares. $d = 0$

**Junio 11. a)** *(1,5 puntos)* Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv 2-x = y = \frac{z+1}{2} \quad , \quad s \equiv \begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases}$$

y que pasa por el punto $A(1,1,2)$

**b)** *(1 punto)* Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2,1,1)$ y $\vec{v} = (-1,1,1)$. Obtener su producto vectorial.

**SOLUCIÓN.**
a) $15x-7y+11z-30=0$ b) $90^o$ ; $\vec{u}\times\vec{v} = (0,-3,3)$

**Junio 11. a)** *(1,5 puntos)* Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,-2,4)$, $B(0,3,2)$ y es paralelo a la recta $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$

**b)** *(1 punto)* En caso de que sea posible, escribir el vector $\vec{v} = (1,2,4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (1,0,1)$, $\vec{b} = (1,1,0)$, $\vec{c} = (0,1,1)$

**SOLUCIÓN.**
a) $4x-2y-7z+20=0$ b) $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$

**Septiembre 11. a)** *(0,75 puntos)* Obtener la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-1,-1,1)$ y es perpendicular al vector $\vec{v} = (1,-2,-1)$.

**b)** *(1 punto)* Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r que se obtiene como intersección de los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv x-2y-z=0 \\ \pi_2 \equiv z-1=0 \end{cases}$

**c)** *(0,75 puntos)* Estudiar si son linealmente independientes los vectores $\vec{v}_1(2,1,0)$, $\vec{v}_2(0,-2,0)$, $\vec{v}_3(0,1,1)$.

**SOLUCIÓN.**
a) $\pi \equiv x-2y-z=0$ b) $r \equiv \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$ c) Son linealmente independientes

**Septiembre 11.** *(2,5 puntos)* Hallar el punto D de la recta $r\equiv\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$ que esté a la misma distancia de los puntos $C=(1\ ,-1\ ,2)$ y $B(1\ ,1\ ,2)$. Razonar si la recta r es perpendicular o no al plano $\pi\equiv -x+2y+z=0$.

**SOLUCIÓN.**
$D(1,0,1)$. No son perpendiculares.

**Junio 12.** **a)** *(1 punto)* Hallar el plano que contiene a la recta v de ecuación paramétrica $v:\ (2,1,3)+t\,(2,1,0)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x+z=2$

**b)** *(1,5 puntos)* Probar que los vectores $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y dar las coordenadas del vector $(1\ ,-2\ ,0)$ en la base anterior.

**SOLUCIÓN.**
**a)** $x-2y-z+3=0$ **b)** Comprobar que los tres vectores son linealmente independientes. $(0,-2,3)$.

**Junio 12.** Sea el haz de planos de ecuación $(1+\lambda)x-y-\lambda z=0$ con parámetro real $\lambda$.

**a)** *(0,5 puntos)* Hallar los planos del haz que pasan por el punto $P=(1\ ,1\ ,1)$.

**b)** *(1 punto)* Hallar los planos del haz cuya distancia al punto $Q(3\ ,-2\ ,1)$ es $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

**c)** *(1 punto)* Hallar los planos del haz que cumplen que el ángulo que forman con el eje OY tiene por seno el valor $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

**SOLUCIÓN.**
**a)** Todos **b)** $-y+z=0$ ; $21x-5y-16z=0$ **c)** $2x-y-z=0$ ; $x+y-2z=0$

**Septiembre 12.** Dado el punto $P(1,0,6)$ y la recta $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2-6\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$

**a)** *(1 punto)* Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por P y corte a la recta r.

**b)** *(1,5 puntos)* Encuentre la ecuación general $(Ax+By+Cz+D=0)$ del plano que contiene a la recta r anterior y a la recta $r':\begin{cases} x-z=0 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$

**SOLUCIÓN.**
**a)** $\begin{cases} x-6y+2z-13=0 \\ 20x+3y-z-14=0 \end{cases}$ **b)** $8x-y-7z-10=0$

**Septiembre 12.** **a)** *(1 punto)* Encuentre la ecuación general $(Ax+By+Cz+D=0)$ del plano que es paralelo a la recta $r: \dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z-3}{4}$ y que contiene los puntos $P=(1,1,1)$ y $Q=(3,5,0)$.

**b)** *(1,5 puntos)* Calcule el ángulo que forman las dos rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 2x-z=-4 \end{cases} \qquad r': \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+5}{2}$$

**SOLUCIÓN.**

**a)** $17x-10y-6z-1=0$ **b)** $\alpha=\arccos\dfrac{4}{9}\simeq 63º\,36'\,44''$

**Junio 13.** **a)** *(1 punto)* ¿Pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$? **Justifique la respuesta**.

**b)** *(1,5 puntos)* Determine todos los posibles vectores $\vec{u}=(a,0,b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta $r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$

**SOLUCIÓN.**

**a)** No **b)** $\vec{u}=\left(4\sqrt{2}\,,0\,,4\sqrt{2}\right)$ , $\vec{u}=\left(-4\sqrt{2}\,,0\,,-4\sqrt{2}\right)$

**Junio 13.** Dadas las rectas: $r: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}$ y $s:\begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$

**a)** *(1,5 puntos)* Determine su posición relativa

**b)** *(1 punto)* Calcule la distancia del punto $P=(2,3,1)$ a la recta s.

**SOLUCIÓN.**

**a)** Las rectas se cruzan **b)** $d=\dfrac{\sqrt{89}}{3}$ u

**Septiembre 13.**

**a)** *(1,25 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos: $\pi: 2x+3y-z=1$ , $\pi':\begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=1-\mu \\ z=-1+2\lambda+\mu \end{cases}$

**b)** *(1,25 puntos)* Encuentre la recta que pasa por el punto $P(0,1,1)$ y es perpendicular al plano $\pi'$. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

**SOLUCIÓN.**

**a)** Se cortan en una recta **b)** $\begin{cases} x-2y+2=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}$

**Septiembre 13.**

Dadas las rectas: $r:\dfrac{x-1}{k}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$ con $k\neq 0$ , $s:\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

**a)** *(2 puntos)* Estudie las posiciones relativas de las rectas según los diferentes valores de k.
**b)** *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de k para los que las rectas son perpendiculares?

**SOLUCIÓN.**
**a)** $\cdot\, k=1:$ paralelas $\cdot\, k\neq 1:$ se cruzan **b)** $k=-5$

**Junio 14.** *(2,5 puntos)* Dados el punto $P\equiv(1,-1,0)$ y la recta: $s:\begin{cases} -2x \quad +z-1=0 \\ 3x-y \quad -3=0 \end{cases}$

**a)** *(1,5 puntos)* Determine la ecuación general del plano $(Ax+By+Cz+D=0)$ que contiene al punto P y a la recta s.
**b)** *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano $\pi:2x+y-z+1=0$ y la recta s.

**SOLUCIÓN.**
**a)** $7x-3y+z-10=0$ **b)** $19^{o}$ 6' 24''

**Junio 14.** *(2,5 puntos)* Considere las rectas $r:\begin{cases} 2x-4z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ $s:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{a}=\dfrac{z-(1/2)}{1}$

**a)** *(2 puntos)* Determine la posición relativa de dichas rectas, según los diferentes valores de a.
**b)** *(0,5 puntos)* Si $a=2$, determine el ángulo que forman las rectas r y s.

**SOLUCIÓN.**
**a)** Si $a=-3:$ paralelas ; si $a\neq -3:$ se cruzan. **b)** $84^{o}$ 53' 20''

**Septiembre 14.** *(2,5 puntos)*

**a)** *(1,5 puntos)* Determine el valor a valores de m, si existen, para que la recta $r:\begin{cases} mx+y=2 \\ x+mz=3 \end{cases}$ sea paralela al plano $\pi:2x-y-z+6=0$.

**b)** *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P=(2,1,1)$ a la recta r cuando $m=2$.

**SOLUCIÓN.**
**a)** $m=-1$ **b)** $d=\sqrt{\dfrac{38}{21}}$

**Septiembre 14.** *(2,5 puntos)*

**a)** *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos $\pi:x-y-z=0$ y $\pi':\begin{cases} x=3+2\lambda-\mu \\ y=1+\lambda+\mu \\ z=\mu \end{cases}$

**b)** *(1 punto)* Determine la ecuación de la recta perpendicular a $\pi$ que pasa por el punto $P=(1,0,1)$. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

**SOLUCIÓN.**

**a)** Se cortan. **b)** $\begin{cases} x+y \quad -1=0 \\ \quad y-z+1=0 \end{cases}$

**Junio 15.** *(2 puntos)*

**a)** *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} -x-2y+12=0 \\ 3y-z-15=0 \end{cases} \qquad s:\ \frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{3}$$

**b)** *(1 punto)* Calcule la distancia entre esas rectas.

**SOLUCIÓN.**

**a)** Las rectas se cruzan. **b)** $d(r,s)=\dfrac{56}{\sqrt{59}}$

**Junio 15.** *(2 puntos)*

**a)** *(1 punto)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta paralela a la recta:

$$r:\begin{cases} 5x-3y+2z=1 \\ x+3y-2z=-4 \end{cases}$$

que pasa por el punto $(0,2,-4)$.

**b)** *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P=(1,1,0)$ a la recta r anterior.

**SOLUCIÓN.**

**a)** $\begin{cases} x=0 \\ 3y-2z=14 \end{cases}$ **b)** $d(P,r)=\dfrac{\sqrt{22}}{2}\,u$

**Septiembre 15.** *(2 puntos)*

**a)** *(1 punto)* Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que satisfacen que $|\vec{u}|=5$, $|\vec{v}|=2$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=10$. Determine $\vec{u}\times\vec{v}$.

**b)** *(1 punto)* Considere las rectas siguientes: $r:\begin{cases} 2x-y=0 \\ ax-z=0 \end{cases}$ $\qquad s:\begin{cases} x+by=3 \\ y+z=3 \end{cases}$

1) *(0,5 puntos)* Determine los valores de $a\neq 0$ y $b\neq 0$ para que las rectas sean paralelas.
2) *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de $a\neq 0$ y $b\neq 0$ para que las rectas sean coincidentes?

**SOLUCIÓN.**

**a)** $\vec{u}\times v=\vec{0}$ **b)** 1) $a=-2$ , $b=-\frac{1}{2}$ 2) No.

**Septiembre 15.** *(2 puntos)*

**a)** *(0,75 puntos)* Sea a un parámetro real cualquiera. Dados los planos:

$$\pi : 3x+ay+2z-10=0 \quad y \quad \pi' : x-y+az-5=0$$

¿Existen valores de a para los que los planos sean paralelos?

**b)** *(1,25 puntos)* Encuentre la ecuación de la recta paralela a la recta intersección de los planos:

$$\pi : 3x+2y+z=10 \quad y \quad \pi' : 4x-2y-8z=10$$

que pasa por el punto $(1,1,0)$.

**SOLUCIÓN.**

**a)** No. **b)** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$

**Junio 16.** *(2 puntos)*

**a)** *(1 punto)*

**a.1)** *(0,5 puntos)* Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}|=|\vec{s}|=2$ y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es 60 grados, determine $\vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s})$.

**a.2)** *(0,5 puntos)* Si el producto escalar del vector $\vec{u}+\vec{v}$ por sí mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u}-\vec{v}$ por sí mismo es 9 ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ ?

**b)** *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas siguientes:

$$r: \frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{2} \qquad s: \begin{cases} x-y-z=1 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN.**
**a)** **a.1)** **2** **a.2)** 4 **b)** $30^{o}$ 57’ 49,52’’

**Junio 16.** *(2 puntos)* Considere el plano $\pi$ y la recta r que aparecen a continuación:

$$\pi: \ mx-3y+2z=1 \qquad r: \begin{cases} 3x+y \qquad =1 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$$

**a)** *(1 punto)* Determine para qué valores del parámetro “m” la recta r y el plano $\pi$ son secantes, es decir, se cortan.

**b)** *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano $\pi$ y la recta r cuando $m=1$.

**SOLUCIÓN.**
**a)** $\forall m\neq -4$ **b)** $19^{o}$ 21’ 34,74’’

**Septiembre 16.** *(2 puntos)* Determine la ecuación de la recta, **expresada como intersección de dos planos**, que pasa por el punto $(1,-1,2)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $A=(1,0,1)$, $B=(3,2,1)$, $C=(2,-1,0)$.

**SOLUCIÓN.**

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$$

**Septiembre 16.** *(2 puntos)*

**a)** *(1,5 puntos)* Determine el valor del parámetro "a" para que el plano $\pi:\ x-3y+az=-6$ sea paralelo a la recta $r:\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+3z=-7 \end{cases}$

**b)** *(0,5 puntos)* Determine el ángulo entre esa recta r y el plano $\pi:\ 2x-3y-z+6=0$.

**SOLUCIÓN.**

**a)** $a=-3$ **b)** $4^{o}\ 5'\ 45{,}76''$

**Junio 17.** *(2 puntos)*

**a)** *(1 punto)* Determine la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

**b)** *(1 punto)* Determine la distancia del punto $P(0,0,0)$ a cada una de las dos rectas anteriores.

**SOLUCIÓN.**

**a)** Se cruzan **b)** $d(P,r)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ; $d(P,s)=0$

**Junio 17.** *(2 puntos)*

**a)** *(1 punto)* Sea "m" una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de "m":

$$\pi: mx-6y+2z=2 \qquad \pi':\begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=1-\lambda \\ z=2-2\lambda+\mu \end{cases}$$

**b)** *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas: $r:\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} 2x-4y-2z=0 \\ x+y+3z=-1 \end{cases}$

**SOLUCIÓN.**

**a)** Para $m=-2$: paralelos ; para $m\neq-2$: secantes **b)** $\alpha=\arccos\dfrac{4}{5}\simeq 36^{o}\ 52'\,12''$

**Septiembre 17.** *(2 puntos)*

**a)** *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi : x - 2y + z = 1 \qquad \pi' : \begin{cases} x = 2\lambda + \mu \\ y = \lambda + k\mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real k.

**b)** *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman esos planos cuando $k = 3$.

**SOLUCIÓN.**

**a)** Para $k = 0$: coincidentes. Para $k \neq 0$: secantes **b)** $90^{o}$

**Septiembre 17.** *(2 puntos)*

**a)** *(1,5 puntos)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r : \begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

y pasa por el punto $P(2, 1, -1)$.

**b)** *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi : 2x - 3y + z = 4 \qquad y \qquad \pi' : y + z = 0$$

**SOLUCIÓN.**

**a)** $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ **b)** 11**2**$^{o}$ 12’ 27,56”