

Ejercicio 1A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Análisis)

Sea f la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax + b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases}$.

a) Calcula a y b .

(1,25 puntos)

b) Para $a = -1$ y $b = 4$, estudia si existe la derivada de f en $x = 2$. En caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.

(1,25 puntos)

Solución

Sea f la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax + b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases}$.

(a)

Calcula a y b .

Como la función es derivable en $\mathbb{R}$, es continua en $\mathbb{R}$; en particular es continua y derivable en $x = 0$.

Como $f(x)$ es continua, lo es en $x = 0$ luego $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2) = 2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{ax + b} = \sqrt{b}.$$

De $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, tenemos $2 = \sqrt{b}$, de donde $b = 4$.

Como $f(x)$ es continua, lo es en $x = 2$ luego $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{ax + 4} = \sqrt{(2a + 4)}. \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

De $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, tenemos $\sqrt{(2a + 4)} = \sqrt{2}$, de donde $2a + 4 = 2$, luego $a = -1$.

(b)

Para $a = -1$ y $b = 4$, estudia si existe la derivada de f en $x = 2$. En caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$ ha de verificarse $f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x)$, veremos la continuidad de la derivada.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{-x + 4} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x + 4}} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \text{si } 2 < x \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x + 4}} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2\sqrt{-x + 4}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}. \quad f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{-\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{4}.$$

Como $f'(2^-) = f'(2^+) = [-\sqrt{2}]/4$, $f(x)$ es derivable en $x = 2$ y $f'(2) = [-\sqrt{2}]/4$.

La recta tangente en $x = 2$ es " $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ ", es decir $y - \sqrt{2} = ([-\sqrt{2}]/4) \cdot (x - 2)$.

Ejercicio 2A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Análisis)

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

(1 punto)

b) Determina los intervalos de convexidad y de concavidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

(1,5 puntos)

Solución

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

(a)
Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Me piden la monotonía. Estudio de $f'(x)$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1); f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

De $f'(x) = 0$, tenemos $2x = 0$, de donde $x = 0$ que será el posible extremo relativo.

Como $f'(-1) = \frac{2(-1)}{(-1)^2 + 1} = -1 < 0$, **f es estrictamente decreciente ($\searrow$) en $(-\infty, 0)$.**

Como $f'(1) = \frac{2(1)}{(1)^2 + 1} = 1 > 0$, **f es estrictamente creciente ($\nearrow$) en $(0, +\infty)$.**

Por definición **$x = 0$ es un máximo relativo y vale $f(0) = \ln(0^2 + 1) = \ln(1) = 0$.**

(b)

Determina los intervalos de convexidad y de concavidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

Sabemos que la curvatura es el estudio de la 2ª derivada.

$$f(x) = \ln(x^2 + 1); f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}; f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}.$$

De $f''(x) = 0$, tenemos $-2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1$, de donde $x = \pm 1$ que serán los posibles puntos de inflexión.

Como $f''(-2) = \frac{-2(-2)^2 + 2}{((-2)^2 + 1)^2} = -6/25 < 0$, **f es cóncava ($\cap$) en $(-1, 2)$ en $(-\infty, -1)$.**

Como $f''(0) = \frac{-2(0)^2 + 2}{((0)^2 + 1)^2} = 2 > 0$, **f es convexa ($\cup$) en $(-1, 1)$.**

Como $f''(2) = \frac{-2(2)^2 + 2}{((2)^2 + 1)^2} = -6/25 < 0$, **f es cóncava ($\cap$) en $(1, +\infty)$.**

Por definición **$x = -1$ es punto de inflexión y vale $f(-1) = \ln((-1)^2 + 1) = \ln(2) \cong 0'69$.**

Por definición **$x = 1$ es punto de inflexión y vale $f(1) = \ln((1)^2 + 1) = \ln(2) \cong 0'69$.**

Ejercicio 3A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Análisis)

Considera la función $F: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x 2t \cdot \cos(t) dt$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de F . (1 punto)

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = \pi$. (1,5 puntos)

Solución

Considera la función $F: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x 2t \cdot \cos(t) dt$.

(a)

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de F .

Por el Teorema fundamental del cálculo integral $F'(x) = \left(\int_0^x 2t \cdot \cos(t) dt \right)' = 2x \cdot \cos(x)$

Me piden la monotonía. Estudio de $F'(x) = 2x \cdot \cos(x)$

De $F'(x) = 0$, tenemos $2x = 0$, de donde $x = 0$ que será el posible extremo relativo, *0 es un extremo del intervalo.*

De $f'(x) = 0$ tenemos $\cos(x) = 0$. (Recordamos que el $\cos(x)$ era la ordenada en la circunferencia goniométrica, por tanto se anula en $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$, por tanto los posibles extremos de la función f tienen de abscisa $x = 0$, $x = \pi/2$, y $x = 3\pi/2$.

Como $F'(\pi/4) = 2(\pi/4) \cdot \cos(\pi/4) = 2(\pi/4) \cdot (\sqrt{2})/2 > 0$, **f es estrictamente creciente ($\nearrow$) en $(0, \pi/2)$.**

Como $F'(\pi) = 2(\pi) \cdot \cos(\pi) = 2(\pi) \cdot (-1) < 0$, **f es estrictamente decreciente** ($\searrow$) en $(\pi/2, 3\pi/2)$.

Como $F'(5) = 2(2 \cdot 5) \cdot \cos(5) = 20 \cdot (0'28) > 0$, **f es estrictamente creciente** ($\nearrow$) en $(3\pi/2, 2\pi)$.

(b)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = C$. (1,5 puntos)

La recta tangente en $x = \pi$ es " $y - F(\pi) = F'(\pi)(x - \pi)$ ". Sabemos que $F'(\pi) = -2\pi$, nos falta calcular $F(\pi)$ para lo cual nos falta calcular la integral.

Calculamos primero la integral indefinida: $I = \int 2t \cdot \cos(t) dt$

$$I = \int 2t \cdot \cos(t) dx = \left\{ \begin{array}{l} u=2t \Rightarrow du=2dt \\ dv=\cos(x)dx \Rightarrow v=\int \cos(t)dt=\sin(t) \end{array} \right\} = 2t \cdot \sin(t) - \int 2\sin(t)dt = 2t \cdot \sin(t) - (-2\cos(t)) + K = 2t \cdot \sin(t) + 2\cos(t) + K.$$

$$\text{Luego } F(x) = \int_0^x 2t \cdot \cos(t)dt = [2t \cdot \sin(t) + 2\cos(t)]_0^x = 2x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) - 0 - 2 \cdot \cos(0) = 2x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) - 2, \text{ por tanto } F(\pi) = 2\pi \cdot \sin(\pi) + 2 \cdot \cos(\pi) - 2 = 0 + 2(-1) - 2 = -4.$$

La recta tangente en $x = \pi$ es " $y - (-4) = (-2\pi)(x - \pi)$ ", es decir $y = -2\pi x + 2\pi^2 - 4$.

Ejercicio 4A del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Análisis)

Calcula $\int_0^1 x \cdot \text{artg}(x) dx$. (donde artg denota la función arcotangente)

Solución

Calculamos primero la integral indefinida: $I = \int x \cdot \text{artg}(x) dx$

$$I = \int x \cdot \text{artg}(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u=\text{artg}(x) \Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx \Rightarrow v=\int xdx=\frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \text{artg}(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \cdot \text{artg}(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \cdot \text{artg}(x) - \frac{1}{2} \cdot I_1$$

$$I_1 = \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \text{artg}(x)$$

Luego

$$I = \int x \cdot \text{artg}(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \text{artg}(x) - \frac{1}{2} \cdot I_1 = \frac{x^2}{2} \cdot \text{artg}(x) - \frac{1}{2} \cdot (x - \text{artg}(x)) + K = \frac{x^2}{2} \cdot \text{artg}(x) + \frac{1}{2} \cdot \text{artg}(x) - \frac{1}{2} x + K$$

$$\text{Por Tanto } \int_0^1 x \cdot \text{artg}(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \text{artg}(x) + \frac{1}{2} \cdot \text{artg}(x) - \frac{1}{2} x \right]_0^1 =$$

$$= (1/2) \cdot \text{artg}(1) + (1/2) \cdot \text{artg}(1) - (1/2) - (1/2) \cdot \text{artg}(0) - (1/2) \cdot \text{artg}(0) + (1/2) =$$

$$= (1/2) \cdot (\pi/4) + (1/2) \cdot (\pi/4) - (1/2) - 0 - 0 + 0 = \pi/4 - 1/2.$$

Ejercicio 5B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Álgebra)

$$\text{Considera el sistema } \begin{cases} 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my - z = -1 \\ 3x + y - 3z = -m \end{cases}.$$

a) Discute el sistema según los valores de m.

(1,75 puntos)

b) Para $m = -2$ encuentra, si es posible, y_0 para que la solución del sistema sea $x = \lambda$, $y = y_0$, $z = \lambda - 3/7$.

(0,75 puntos)

Solución

$$\text{Considera el sistema } \begin{cases} 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my - z = -1 \\ 3x + y - 3z = -m \end{cases}.$$

(a)

Discute el sistema según los valores de m .

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & m \\ 1 & m & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & m & 3 \\ 1 & m & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -m \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 1 & m & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3+C_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2+m \\ 1 & m & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos
tercera = $(2+m)(1-3m)$.
columna

Si $|A| = 0$, tenemos $(2+m)(1-3m) = 0$, de donde $m = -2$ y $m = 1/3$.

Si $m \neq -2$ y $m \neq 1/3$, $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si $m = -2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3+C_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ por tener dos filas iguales, $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas).**

Si $m = 1/3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1/3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 \\ 3 & 1 & -1/3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3+C_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 3 & 1 & 8/3 \end{vmatrix}$ Adjuntos
segunda = $-(1) \cdot (8-5) + (1/3) \cdot (16/3-15) = -3 - 29/9 = 2/9 \neq 0$
fila
, $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, **el sistema es incompatible y no tiene solución.**

(b)

Para $m = -2$ encuentra, si es posible, y_0 para que la solución del sistema sea $x = \lambda$, $y = y_0$, $z = \lambda - 3/7$.

Hemos visto en el apartado anterior que si $m = -2$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 & (E_1 - 2E_2) \\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \approx \begin{cases} +7y = 5 \\ x - 2y - z = -1 \end{cases}, \text{ de donde } y = 5/7 \text{ y tomando } x = \lambda \in \mathbb{R}, z = 1 - 10/7 + \lambda = -3/7 + \lambda.$$

Solución $(x, y, z) = (\lambda, 5/7, -3/7 + \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Ciertamente donde $y_0 = 5/7$.

Ejercicio 6B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Álgebra)

Dado $a \neq 0$ considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determina para que valores de a se cumple que $A^{-1} = (1/4) \cdot A$.

(1,25 puntos)

- b) Para $a = 1$ calcula, si es posible, la matriz X tal que $AX = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .
(1,25 puntos)

Solución

Dado $a \neq 0$ considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a)

Determina para que valores de a se cumple que $A^{-1} = (1/4) \cdot A$.

En principio para que exista A^{-1} , su determinante $|A|$ tiene que ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -a - 3a = -4a. \text{ Luego si } a \neq 0 \text{ existe } A^{-1}.$$

$$\text{Veamos } A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)^t}{|A|}.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -a & a \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -a & -a \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{1}{-4a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -a & -a \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1/a & 3/a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De } A^{-1} = (1/4) \cdot A \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1/a & 3/a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \text{ de donde } -1/a = -a; 3/a = 3; 1 = a \text{ y } 1 = 1.$$

$$\text{De } -1/a = -a \rightarrow a^2 = 1, \text{ luego } a = \pm 1.$$

$$\text{De } 3/a = a \rightarrow a = 1.$$

Luego para A tenga inversa y verifique $A^{-1} = (1/4) \cdot A$ tiene que verificarse que $a = 1$.

(b)

Para $a = 1$ calcula, si es posible, la matriz X tal que $AX = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

$$\text{Para } a = 1, A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De $AX = B^t$, multiplicando por la izquierda por A^{-1} tenemos: $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B^t \rightarrow IX = A^{-1} \cdot B^t$, **de donde resulta $X = A^{-1} \cdot B^t$.**

$$\text{La matriz } X \text{ pedida es: } X = A^{-1} \cdot B^t = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 9 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9/4 & 5/4 \\ 0 & 7/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Geometría)

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a r .

(1,25 puntos)

b) Calcula la distancia entre r y π .

(1,25 puntos)

Solución

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

(a)

Determina la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a r .

(1,25 puntos)

El vector normal del plano π es $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$. Un punto de " r " es $A(0, 1, 0)$, y un vector director es $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$.

Para un plano necesitamos un punto, el $A(0,1,0)$ (contiene a r) y dos vectores independientes el $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$ (contiene a r) y el $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ (el plano es perpendicular a π).

El plano pedido es: $\pi' \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0 = \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos
primera = $x(-1-0) - (y+1)(1-0) + (z)(1+1) = 0 =$
fila
 $= -x - y + 2z - 1 = 0 = x + y - 2z - 1 = 0.$

b)

Calcula la distancia entre r y π .

Como el plano π es paralelo a r , $d(r, \pi) = d(A, \pi)$ siendo A un punto cualquiera de la recta, en nuestro caso $A(0, 1, 0)$.

Luego $d(r, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|(0) + (1) + (0)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} u^1 \cong 0.57735 u^1.$

Ejercicio 8B del Modelo 3 (Ordinario Suplente) de 2022 (Geometría)

Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 3 = 0$, $\pi_2 \equiv x + 2y - z + 5 = 0$ y la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{5}.$

a) Halla los puntos de r que equidistan de π_1 y π_2 .

(2 puntos)

b) Halla el seno del ángulo que forma el plano π_1 con la recta r .

(0,5 puntos)

Solución

Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 3 = 0$, $\pi_2 \equiv x + 2y - z + 5 = 0$ y la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{5}.$

(a)

Halla los puntos de r que equidistan de π_1 y π_2 .

Ponemos la recta r en forma vectorial es " r " $\equiv (x, y, z) = (1 + m, 2m, -1 + 5m).$

Un punto genérico de la recta " r " es $X = (1 + m, 2m, -1 + 5m).$

Como me piden los puntos de " r " que equidistan de π_1 y π_2 , tengo que resolver la ecuación:

$d(X, \pi_1) = d(X, \pi_2)$, con X punto genérico de " r ".

$$d(X, \pi_1) = \frac{|2 \cdot (1 + m) + (2m) + (-1 + 5m) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|9m - 2|}{\sqrt{6}}.$$

$$d(X, \pi_2) = \frac{|(1 + m) + 2 \cdot (2m) - (-1 + 5m) + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{6}}.$$

Igualando tenemos $\frac{|9m - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{|7|}{\sqrt{6}}$, es decir $|9m - 2| = |7|$, de donde salen dos ecuaciones:

$(9m - 2) = +(7)$, de donde $9m = 9$, es decir $m = 1$ y un punto de la recta que equidista de ambos planos es $X_1(1 + (1), 2(1), -1 + 5(1)) = X_1(2, 2, 4).$

$(9m - 2) = -(7)$, de donde $9m = -5$, es decir $m = -5/9$ y el otro punto de la recta que equidista de ambos planos es $X_2(1 + (-5/9), 2(-5/9), -1 + 5(-5/9)) = X_2(4/9, -10/9, -34/9).$

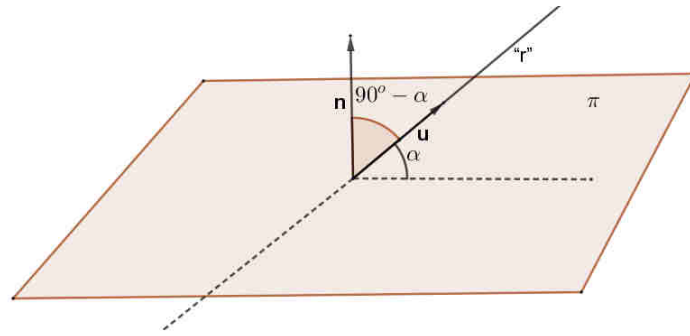
(b)

Halla el seno del ángulo que forma el plano π_1 con la recta r .

Dada la recta $r(\mathbf{A}, \mathbf{u})$ y el plano $\pi(\mathbf{n})$ se define el ángulo que forma la recta " r " con el plano π como el menor de los ángulos que forma la recta " r " con la recta " r' ", proyección de " r " sobre el plano

Se observa que el ángulo que forma la recta " r " con el plano π coincide con el complementario del menor de los ángulos que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano con un origen común, es decir $\cos(\langle r, \pi \rangle) = |\cos(\alpha)|$, ahora bien como $\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$. Tomando el valor absoluto del seno nos aseguramos de que el ángulo es el menor y no supera lo 90° sexagesimales.

$$\sin(\alpha) = \sin(\langle r, \pi \rangle) = \cos(90^\circ - \alpha) = |\cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle)| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}.$$



El vector director de la recta "r", el $\mathbf{u} = (1, 2, 5)$. El vector normal del plano π_1 es $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$
 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 2 + 2 + 5 = 9$; $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1^2 + 2^2 + 5^2)} = \sqrt{30}$; $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{(2^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{6} = 3$, luego:

$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\langle r, \pi \rangle) = \cos(90^\circ - \alpha) = |\cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle)| = \left| \frac{9}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{6}} \right| \cong 0'67082039.$$