Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de
Bachillerato
para el acceso a la Universidad
(EBAU)
Curso 2021-2022

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

BLOQUE 1.A. Dado $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula el rango de A según los valores de x.
(c) **(0.75 puntos)** Para x = 1, calcula en caso de que sea posible $A \cdot B$ y $A \cdot C$ o indica por qué no se puede realizar.

BLOQUE 1.B. Dado $m \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = m \end{array}\right\}$

(a) **(1.75 puntos)** Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en los que sea posible.
(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar una solución en la que z = 3.

BLOQUE 2.A. Considera la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{1-x}$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula el dominio de f y sus asíntotas.
(b) **(1.25 puntos)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

BLOQUE 2.B. Dada la función $f(x) = -sen(2x) + 1$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el origen de coordenadas.
(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas x = 0 y x = π.

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2021-2022

BLOQUE 3.A. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y el vector $\vec{v} = (1,1,1)$.

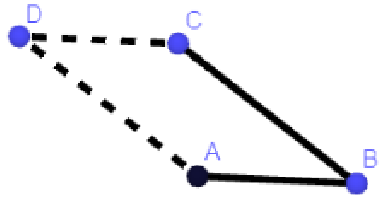
(a) **(0.5 puntos)** Calcula $\overrightarrow{v_r}$ un vector director de r.

(b) **(1 punto)** Calcula un vector $\vec{u}$ director de s tal que $\vec{u} \times \overrightarrow{v_r}$ es proporcional a $\vec{v}$.

(c) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s′, siendo $s' \equiv x-1 = \dfrac{y-1}{-2} = z$

BLOQUE 3.B. Dados los puntos A = (1, 0, 1), B = (1, 6, 1), C = (–2, –1, 5) y E = (–1, 1 , 1).

(a) **(0.5 puntos)** Calcula ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.
(b) **(1 punto)** Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo y el área de ABCD.
(c) **(1 punto)** Halla ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por E.



BLOQUE 4.A. En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70% de las personas que entran son mujeres. El 40% de los hombres y el 30% de las mujeres que entran son menores de 30 años.
(a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.
(b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años?
(c) **(1.25 puntos)** Si la persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

BLOQUE 4.B. Se está estudiando la altura de la población adulta de una cierta ciudad y se observa que el modelo se rige por una distribución normal con media 1.75m y desviación típica 0.65m.
(a) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que, tomado un adulto al azar mida más de 1.85m.
(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 personas ¿Cuántas personas medirán más de 1,85m?
(c) **(1 punto)** Se observa que, de las 10000 personas de la muestra, 6500 miden menos de 1.90m, suponiendo que se mantiene la media ¿cuál sería la desviación típica?

(Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: F(x) = P(Z ≤ x), F(0) = 0.5, F(0.15) = 0.6, F(0.1538) = 0.5596, F(0.65) = 0.7422, F(0.385) = 0.65.)

SOLUCIONES

BLOQUE 1.A. Dado $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\\ -1 & x-1 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula el rango de A según los valores de x.
(c) **(0.75 puntos)** Para x = 1, calcula en caso de que sea posible $A\cdot B$ y $A\cdot C$ o indica por qué no se puede realizar.

(a) La matriz A no tiene inversa si su determinante es nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & -2\\ -1 & x-1 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-x+1+3+4+2x-2-1-6=x-1$$

$$|A|=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La matriz A no tiene inversa para $x = 1$.

(b) Hemos visto que el determinante de A se anula para $x = 1$.
Por lo tanto el rango de A es 3 si $x \neq 1$.
Averiguamos el rango de A para $x = 1$.

Si $x = 1$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª comprobamos que su determinante es no nulo y por tanto el rango de A es 2.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Resumiendo: Si $x \neq 1$ el rango de A es 3 y si $x = 1$ el rango de A es 2.

(c) Si $x = 1$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

A · B es posible pues coinciden el número de columnas de A con el número de filas de B.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1-2\\ -1+0-3\\ 1-2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -4\\ 0\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 1 \to 3\times 1$$

A · C no es posible pues no coinciden el número de columnas de A con el número de filas de C.

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{¡Imposible!}$$

$$3 \times \boxed{3 \quad \cdot \quad 1} \times 3 \rightarrow \text{¡Imposible!}$$

BLOQUE 1.B. Dado $m \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=-1 \\ 3x+3y+2z=m \end{array}\right\}$

(a) **(1.75 puntos)** Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en los que sea posible.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar una solución en la que z = 3.

(a) Usando el método de Gauss obtenemos un sistema equivalente al dado pero más fácil de estudiar.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=-1 \\ 3x+3y+2z=m \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \textit{Ecuación}\, 3^{a} - 3\cdot \textit{Ecuación}\, 2^{a} \\ \begin{array}{rrrl} 3x & +3y & +2z & =m \\ -3x & -6y & -3z & =3 \\ \hline & -3y & -z & =3+m \to \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot \textit{Ecuación}\, 2^{a} - \textit{Ecuación}\, 1^{a} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & +4y & +2z & =-2 \\ -2x & -y & -z & =-1 \\ \hline & 3y & +z & =-3 \to \text{Nueva ecuación } 2^{a} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+z=1 \\ 3y+z=-3 \\ -3y-z=3+m \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Ecuación}\, 3^{a} + \textit{Ecuación}\, 2^{a} \\ \begin{array}{rrcr} -3y & -z & = & 3+m \\ 3y & +z & = & -3 \\ \hline & 0 & = & m \to \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=1 \\ 3y+z=-3 \\ 0=m \end{array}\right\}}$$

Se plantean dos situaciones diferentes.

Si *m = 0* tenemos que el sistema queda $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=1 \\ 3y+z=-3 \\ 0=0 \end{array}\right\}$. Este sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=1 \\ 3y+z=-3 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+z=1 \\ 3y+z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+z=1 \\ \boxed{z=-3-3y} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+y-3-3y=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2y=4 \Rightarrow x-y=2 \Rightarrow \boxed{x=2+y} \Rightarrow \boxed{\textit{Solución}: \left\{\begin{array}{l} x=2+t \\ y=t \\ z=-3-3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}}$$

Si m ≠ 0 el sistema queda $\left.\begin{array}{r} 2x+\ y+\ z=1 \\ 3y+z=-3 \\ 0=m \end{array}\right\}$ ¡Imposible!

El sistema es incompatible (sin solución).

(b) Como para *m* = *0* las soluciones son $\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=-3-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ buscamos en estas infinitas soluciones si es posible que *z* = *3*.

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=3=-3-3t \to 3t=-6 \to t=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-2=0 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}}$$

Si es posible. La solución es: *x* = *0*, *y* = *–2*, *z* = *3*.

BLOQUE 2.A. Considera la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{1-x}$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula el dominio de f y sus asíntotas.
(b) **(1.25 puntos)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

(a) El dominio de f son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
Dom f(x) = $\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntota vertical. $x=a$
¿*x* = *1* es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2}{1-x}=\frac{2}{0}=\infty$$

x = *1* es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}=\frac{2}{0}=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{1-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}-1}=\frac{2}{0-1}=-2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{1-x}+2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2x-2x^2}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}-1}=\frac{2}{0-1}=-2$$

La asíntota oblicua es $y=-2x-2$.

(b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{2x^2}{1-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x(1-x)-2x^2(-1)}{(1-x)^2}=\frac{4x-4x^2+2x^2}{(1-x)^2}=\frac{4x-2x^2}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x-2x^2}{(1-x)^2}=0 \Rightarrow 4x-2x^2=0 \Rightarrow 2x(2-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos *x = 1* excluido del dominio.

En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale

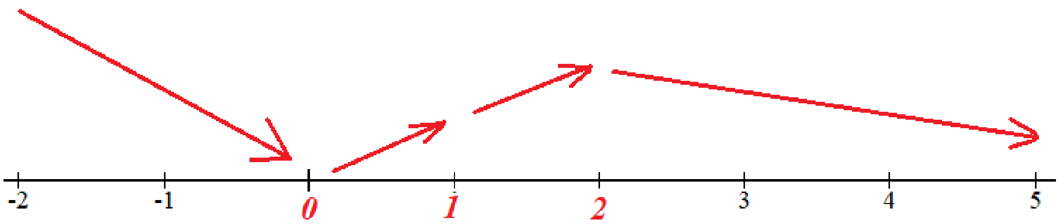
$f'(-1)=\frac{-4-2(-1)^2}{(1-(-1))^2}=\frac{-2}{4}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.

En el intervalo $(0,1)$ tomamos *x = 0.5* y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{2-2\cdot 0.5^2}{(1-0.5)^2}=\frac{1.5}{0.25}>0$. La función crece en $(0,1)$.

En el intervalo $(1,2)$ tomamos *x = 1.5* y la derivada vale $f'(1.5)=\frac{6-2\cdot 1.5^2}{(1-1.5)^2}=\frac{1.5}{0.25}>0$. La función crece en $(1,2)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f'(3)=\frac{12-2\cdot 3^2}{(1-3)^2}=\frac{-6}{4}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(0,1)\cup(1,2)$.

La función presenta un mínimo relativo en *x = 0* y un máximo relativo en *x = 2*.

Como $f(0)=\frac{0}{1-0}=0$ y $f(2)=\frac{2\cdot 2^2}{1-2}=-8$ las coordenadas del mínimo relativo son (0, 0) y del máximo relativo son (2, –8).

Para buscar los puntos de inflexión utilizamos la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{4x-2x^2}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{(4-4x)(1-x)^2-(4x-2x^2)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} \Rightarrow$$

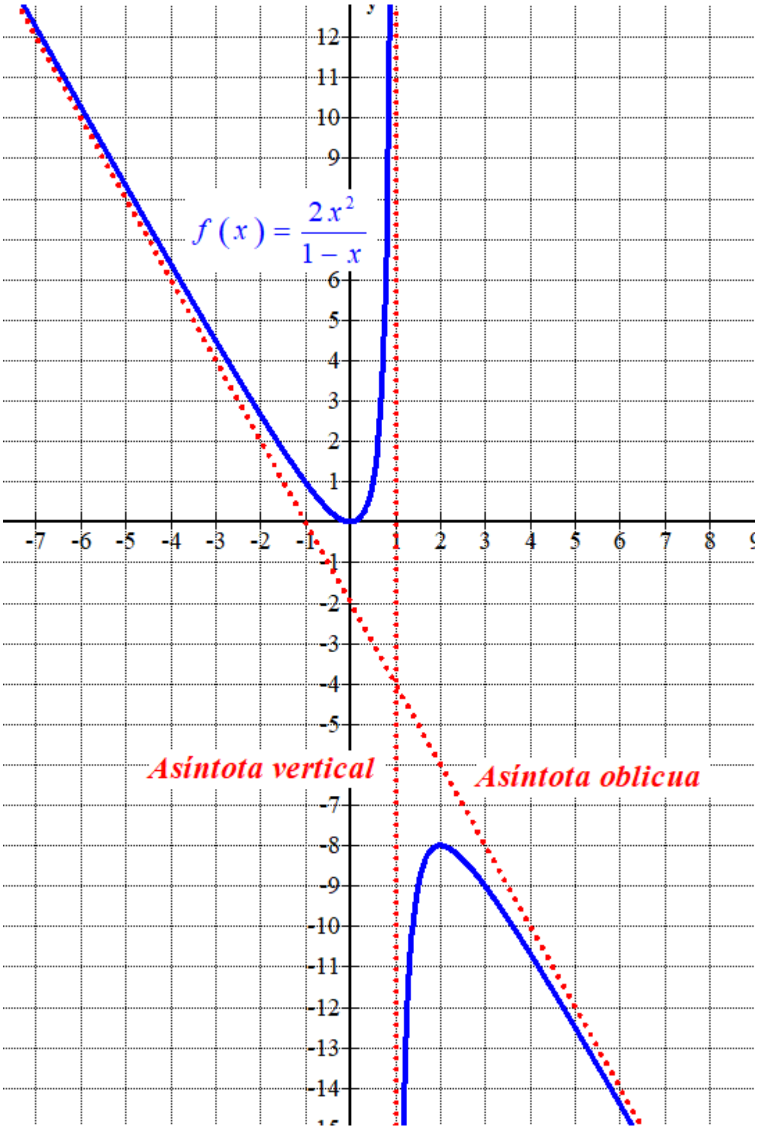
$$f''(x)=\frac{(1-x)\left[(4-4x)(1-x)+2(4x-2x^2)\right]}{(1-x)^4}=\frac{\left[4-4x-4x+4x^2+8x-4x^2\right]}{(1-x)^3}=\frac{4}{(1-x)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{(1-x)^3} = 0 \Rightarrow 4 = 0 \text{ ¡Imposible!}$$

La función no tiene puntos de inflexión. La función cambia de curvatura en $x = 1$ que no pertenece al dominio de definición de la función.

(c) Hacemos una tabla de valores y representamos la función.

x	$y = \frac{2x^2}{1-x}$
-2	$8/3$
0	0
0.5	1
1.5	-9
2	-8
3	-9



BLOQUE 2.B. Dada la función $f(x) = -sen(2x)+1$.
(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el origen de coordenadas.
(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas x = 0 y x = π.

(a) Calculamos la integral de la función.

$$F(x) = \int f(x) = \int -sen(2x)+1dx = \frac{\cos(2x)}{2}+x+K$$

Como debe pasar por el punto (0, 0) tenemos que debe cumplirse que *F(0) = 0.*

$$\left.\begin{array}{r} F(x) = \frac{\cos(2x)}{2}+x+K \\ F(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \frac{\cos(0)}{2}+0+K \Rightarrow \boxed{K = -\frac{1}{2}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{\cos(2x)}{2}+x-\frac{1}{2}$

(b) Comprobamos si la función corta el eje X.

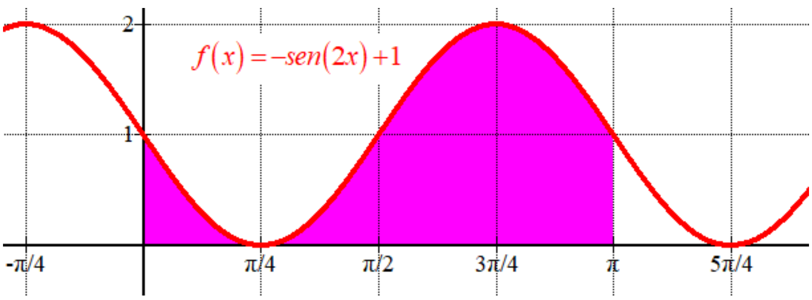
$$\left.\begin{array}{r} f(x) = -sen(2x)+1 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -sen(2x)+1=0 \Rightarrow sen(2x)=1 \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} \to x = \frac{\pi}{4} \in (0,\pi) \\ 2x = \frac{\pi}{2}+2\pi \to x = \frac{5\pi}{4} \notin (0,\pi) \end{cases}$$

A pesar de tener este punto de corte con el eje X la función $f(x) = -sen(2x)+1$ es siempre positiva pues el seno de un ángulo siempre es menor que 1.
El área limitada por *f*, el eje X y las rectas *x = 0* y *x = π* se calcula como la integral definida entre 0 y π de la función.

$$\acute{A}rea = \int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi -sen(2x)+1dx = \left[\frac{\cos(2x)}{2}+x\right]_0^\pi =$$

$$= \left[\frac{\cos(2\pi)}{2}+\pi\right] - \left[\frac{\cos(0)}{2}+0\right] = \frac{1}{2}+\pi-\frac{1}{2} = \boxed{\pi u^2}$$

No pide representarla, pero lo hacemos como comprobación de la solución.



BLOQUE 3.A. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y el vector $\vec{v} = (1,1,1)$.

(a) **(0.5 puntos)** Calcula $\vec{v_r}$ un vector director de r.

(b) **(1 punto)** Calcula un vector $\vec{u}$ director de s tal que $\vec{u} \times \vec{v_r}$ es proporcional a $\vec{v}$.

(c) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s′, siendo $s' \equiv x-1 = \frac{y-1}{-2} = z$

(a) $r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v_r} = (1,0,-1) \\ P_r(1,1,0) \end{cases}$

Un vector director de *r* es $\vec{v_r} = (1,0,-1)$

(b) Como la recta *s* es perpendicular a *r* y al vector $\vec{v} = (1,1,1)$ un vector director de *s* es el producto vectorial del vector director de *r* y $\vec{v} = (1,1,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (1,1,1) \\ \vec{v_r} = (1,0,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u_s} = \vec{v} \times \vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i + j - k + j = -i + 2j - k = (-1,2,-1)$$

El vector buscado es $\vec{u_s} = (-1,2,-1)$

(c) Las rectas *r* y *s´* deben cortarse o ser paralelas para definir un plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v_r} = (1,0,-1) \\ P_r(1,1,0) \end{cases}$$

$$s' \equiv x-1 = \frac{y-1}{-2} = z \Rightarrow s' \equiv \begin{cases} \vec{w_{s'}} = (1,-2,1) \\ Q_{s'}(1,1,0) \end{cases}$$

Como comprobamos se cortan en el punto $P_r = Q_{s'}$.

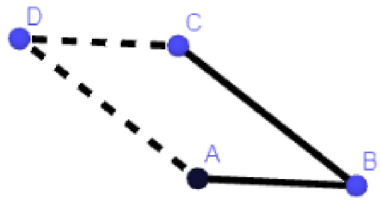
Calculamos la ecuación del plano que las contiene considerando que el punto P_r pertenece al plano y que sus vectores directores son los vectores directores de las rectas.

$$\pi \equiv \begin{cases} P_r(1,1,0) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{v_r} = (1,0,-1) \\ \vec{v} = \vec{w_{s'}} = (1,-2,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y+1-2z-y+1-2x+2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv -2x-2y-2z+4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+y+z-2 = 0}$$

BLOQUE 3.B. Dados los puntos A = (1, 0, 1), B = (1, 6, 1), C = (–2, –1, 5) y E = (–1, 1 , 1).

((a) **(0.5 puntos)** Calcula ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.
(b) **(1 punto)** Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo y el área de ABCD.
(c) **(1 punto)** Halla ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por E.



(a) El plano π que contiene a los puntos A, B y C tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}\, y\, \overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,1)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,6,1)-(1,0,1)=(0,6,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-2,-1,5)-(1,0,1)=(-3,-1,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x-24+18z-18=0\Rightarrow 24x+18z-42=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv 4x+3z-7=0}$$

(b) El punto *D(x, y, z)* debe cumplir que $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BA}=(1,0,1)-(1,6,1)=(0,-6,0) \\ \overrightarrow{CD}=(x,y,z)-(-2,-1,5)=(x+2,y+1,z-5) \\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow (0,-6,0)=(x+2,y+1,z-5)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0\rightarrow x=-2 \\ y+1=-6\rightarrow y=-7\Rightarrow \boxed{D(-2,-7,5)} \\ z-5=0\rightarrow z=5 \end{cases}$$

El área del paralelogramo ABCD es el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BA}=(0,-6,0) \\ \overrightarrow{BC}=(-2,-1,5)-(1,6,1)=(-3,-7,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -6 & 0 \\ -3 & -7 & 4 \end{vmatrix}=-24i-18k=(-24,0,-18)$$

$$Área=\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-24)^2+0^2+(-18)^2}=30\,u^2$$

El área es 30 u^2.

(c) La recta *r* perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi\equiv 4x+3z-7=0\Rightarrow \vec{n}=(4,0,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} E(-1,1,1)\in r \\ \overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(4,0,3) \end{array}\right\} \Rightarrow r\equiv \begin{cases} x=-1+4\lambda \\ y=1 \\ z=1+3\lambda \end{cases}$$

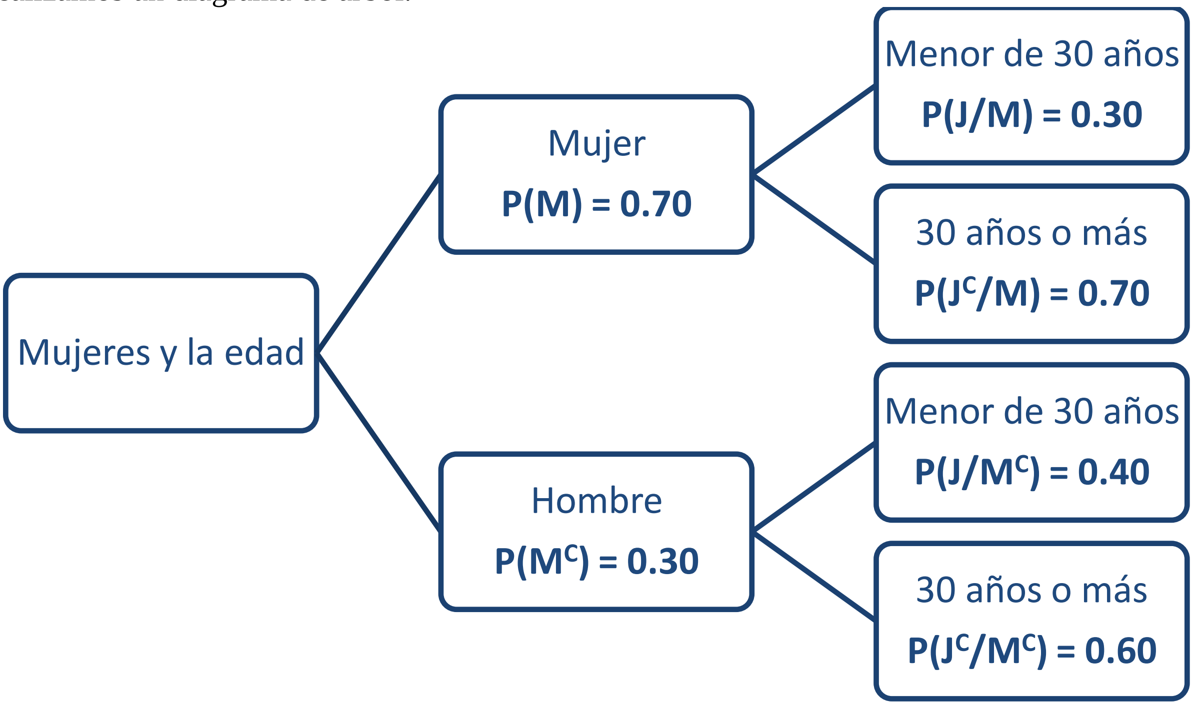
BLOQUE 4.A. En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70% de las personas que entran son mujeres. El 40% de los hombres y el 30% de las mujeres que entran son menores de 30 años.

(a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.

(b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años?

(c) **(1.25 puntos)** Si la persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Llamamos M= "Ser mujer" y J = "Ser menor de 30 años"
Realizamos un diagrama de árbol.



(a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(J) = P(M)P(J/M) + P(M^C)P(J/M^C) = 0.7\cdot 0.3 + 0.3\cdot 0.4 = \boxed{0.33}$$

(b) $P(M^C \cap J^C) = P(M^C)P(J^C/M^C) = 0.3\cdot 0.6 = \boxed{0.18}$

(c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M^C/J^C) = \frac{P(M^C \cap J^C)}{P(J^C)} = \frac{P(M^C \cap J^C)}{1-P(J)} = \frac{0.18}{1-0.33} = \boxed{\frac{18}{67} \simeq 0.2687}$$

BLOQUE 4.B. Se está estudiando la altura de la población adulta de una cierta ciudad y se observa que el modelo se rige por una distribución normal con media 1.75m y desviación típica 0.65m.
(a) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que, tomado un adulto al azar mida más de 1.85m.
(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 personas ¿Cuántas personas medirán más de 1.85m?
(c) **(1 punto)** Se observa que, de las 10000 personas de la muestra, 6500 miden menos de 1.90m, suponiendo que se mantiene la media ¿cuál sería la desviación típica?

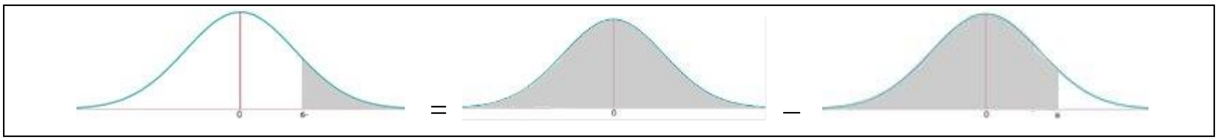
(Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: F(x) = P(Z ≤ x), F(0) = 0.5, F(0.15) = 0.6, F(0.1538) = 0.5596, F(0.65) = 0.7422, F(0.385) = 0.65.)

Sea X = La altura de la población adulta de una cierta ciudad
X = N(1.75, 0.65).

a) Nos piden $P(X \geq 1.85)$.

$$P(X \geq 1.85) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{1.85-1.75}{0.65}\right) = P(Z \geq 0.1538) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.1538) = \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en los datos proporcionados}\\ F(0.1538) = 0.5596\end{array}\right\} = 1 - 0.5596 = \boxed{0.4404}$$



b) Sabemos que $P(X \geq 1.85) = 0.4404$ por lo que en 10000 repeticiones debemos obtener $10000 \cdot 0.4404 = \boxed{4404}$ personas que midan más de 1.85 meros.

(c) Sea X = La altura de la población adulta de una cierta ciudad

X = N(1.75, σ).

Sabemos que $P(X < 1.90) = \frac{6500}{10000} = 0.65$

Calculamos esta probabilidad usando la distribución normal.

$$P(X < 1.90) = \{Tipificamos\} = P\left(Z < \frac{1.90-1.75}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{0.15}{\sigma}\right) = 0.65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en los datos proporcionados}\\ F(0.385) = 0.65\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{0.15}{\sigma} = 0.385 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{0.15}{0.385} = 0.3896}$$