Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad
(EBAU)
Curso 2021-2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. La dueña de una cafetería ha comprado café y leche por un importe total de 2500 euros. Si vende todos estos productos, ganando un 80% con el café y un m% con la leche, obtiene por ellos un importe total de 2900 + 20m euros.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el coste de compra del café y la leche.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuánto costó el café si el beneficio de venta de la leche es del 20%?

1B. Las pruebas de selección de personal de una empresa consisten, entre otras actividades, en un test de 80 preguntas. Cada pregunta bien contestada suma 1 punto, cada pregunta mal contestada resta 0,5 puntos, no sumando ni restando las preguntas que se dejan sin contestar. Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas preguntas se pueden contestar correctamente y cuántas se pueden fallar para aprobar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podría aprobar contestando exactamente 40 preguntas bien y 20 mal?

b) **[0,75 puntos]** ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas fallar para aprobar dejando el máximo número de preguntas sin contestar? ¿Cuántos puntos se obtendrían en ese caso?

2A. Una empresa ingresa 500 miles de euros por cada tonelada de producto que vende. En cuanto a costes, tiene unos costes de producción, entre mano de obra y materia prima, de 250 miles de euros por cada tonelada que produce. Además, cada año debe pagar como impuestos el x% de sus ingresos, si ha vendido x toneladas de producto. Por último, la empresa tiene unos costes fijos anuales de 1125 miles de euros. Si f representa los beneficios (ingresos - costes) anuales, la producción máxima anual es de 40 toneladas y esta empresa vende cada año todo lo que produce, se pide:

a) **[1,75 puntos]** Obtener la expresión de la función f en función de x. Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo [0, 40].

b) **[0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe producir en un año para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que producir en un año para que el beneficio sea positivo?

2B. Dada la función $f(x)=x^3-4x^2+3x$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que F(1) = 1.
b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre x = 0 y x = 4.

3A. Una empresa láctea se encarga de procesar leche y envasarla en botellas. De estas, el 70% son de leche entera, el 20% de leche semidesnatada y el resto de leche desnatada. Además, se sabe que el 5% de las botellas de leche entera se exportan fuera del país, así como el 3% de las de leche semidesnatada y el 10% de las de leche desnatada.
a) **[1,25 puntos]** Si se elige una botella al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea exportada?
b) **[1,25 puntos]** Si se elige una botella al azar de entre las exportadas, ¿cuál es la probabilidad de que contenga leche semidesnatada?

3B. En la segunda vuelta de unas elecciones presidenciales el 40% de los votantes votan al candidato A y el 60% restante al B. De los votantes del candidato A, el 25% son mujeres, mientras que un 20% de los votantes del candidato B son hombres.
a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar, sea mujer.
b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar entre los hombres, haya votado al candidato A.

4A Para estudiar el tiempo medio que tarda la compañía PhoneFun en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono, se consideró una muestra aleatoria de 200 clientes y se obtuvo que el tiempo medio de portabilidad para ellos fue de 40 horas. Se supone que el tiempo de portabilidad se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 10 horas.*
a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio de portabilidad en esa compañía, al 90% de confianza.
b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el número mínimo de clientes en la muestra necesario para estimar el verdadero tiempo medio de portabilidad en esa compañía mediante un intervalo de amplitud menor o igual a 2 horas y un nivel de confianza del 90%?

4B. En una determinada ciudad se ha seleccionado una muestra aleatoria de 300 hogares, de los que 240 reciclan sus envases de plástico habitualmente.*
a) **[1,5 puntos]** Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de hogares que reciclan el plástico habitualmente en esa ciudad.
b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría a la amplitud del intervalo si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

SOLUCIONES:

1A. La dueña de una cafetería ha comprado café y leche por un importe total de 2500 euros. Si vende todos estos productos, ganando un 80% con el café y un m% con la leche, obtiene por ellos un importe total de 2900 + 20m euros.
a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el coste de compra del café y la leche.
b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuánto costó el café si el beneficio de venta de la leche es del 20%?

a) Si representamos por *x* e *y* el coste, en euros, del café y la leche, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar las siguientes ecuaciones:

"ha comprado café y leche por un importe total de 2500 euros" → $x+y=2500$
"Si vende todos estos productos, ganando un 80% con el café y un m% con la leche, obtiene por ellos un importe total de 2900 + 20m euros**"** → Le restamos al importe total (2900 + 20m €) los 2500 € del coste y eso debe ser el beneficio que se obtiene del 80 % del café y el m % de la leche → $\frac{80}{100}x+\frac{m}{100}y=2900+20m-2500$ → $\frac{80}{100}x+\frac{m}{100}y=400+20m$

Juntamos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2500 \\ \frac{80}{100}x+\frac{m}{100}y=400+20m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=2500 \\ 80x+my=40000+2000m \end{array}\right\}$$

b) Lo transformamos en otro equivalente más sencillo de resolver.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2500 \\ 80x+my=40000+2000m \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{llcl} \multicolumn{4}{l}{\text{Ecuación } 2^{a} - 80\cdot \text{Ecuación } 1^{a}} \\ 80x & +my & = & 40000+2000m \\ -80x & -80y & = & -200000 \\ \hline & (m-80)y & = & 2000m-160000 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+\quad y=2500 \\ (m-80)y=2000m-160000 \end{array}\right\}$$

Si $m \neq 80$ podemos resolver el sistema y tendríamos una única solución en función de *m*.

Si $m = 80$ el sistema queda $\left.\begin{array}{r} x+y=2500 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=2500-y}$. El sistema tendría infinitas soluciones, la única condición es que el coste del café y de la leche sean 2500 €.
El sistema tiene solución para cualquier valor de *m*. La solución es única cuando $m \neq 80$.

Para $m = 20$ el sistema tiene solución única. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+ \quad y=2500 \\ (20-80)\,y=2000\cdot 20-160000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+ \quad y=2500 \\ -60y=-120000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+ \quad y=2500 \\ \boxed{y=2000} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2000=2500 \Rightarrow \boxed{x=500}$$

Si el beneficio de venta de la leche es del 20% el café costó 500 €.

1B. Las pruebas de selección de personal de una empresa consisten, entre otras actividades, en un test de 80 preguntas. Cada pregunta bien contestada suma 1 punto, cada pregunta mal contestada resta 0,5 puntos, no sumando ni restando las preguntas que se dejan sin contestar. Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test.
a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas preguntas se pueden contestar correctamente y cuántas se pueden fallar para aprobar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podría aprobar contestando exactamente 40 preguntas bien y 20 mal?
b) **[0,75 puntos]** ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas fallar para aprobar dejando el máximo número de preguntas sin contestar? ¿Cuántos puntos se obtendrían en ese caso?

a) En el test de 80 preguntas hay respuestas correctas, incorrectas y no respondidas.
Llamamos x e y al número de respuestas correctas e incorrectas, respectivamente.

La puntuación obtenida en el examen es $x-0.5y$.
Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test → $x-0.5y \geq 35$
El número de respuestas correctas e incorrectas debe ser positivo → $x \geq 0;\ y \geq 0$
La suma de respuestas de respuestas correctas e incorrectas debe ser menor o igual a 80 → $x+y \leq 80$

Todas las inecuaciones juntas forman un sistema:

$$\left.\begin{array}{c} x-0.5y \geq 35 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x+y \leq 80 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2x-y \geq 70 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x+y \leq 80 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} y \leq 2x-70 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x+y \leq 80 \end{array}\right\}$$

Representamos la región del plano que cumple el sistema de inecuaciones empezando por representar las rectas que delimitan la región.

$y=2x-70$

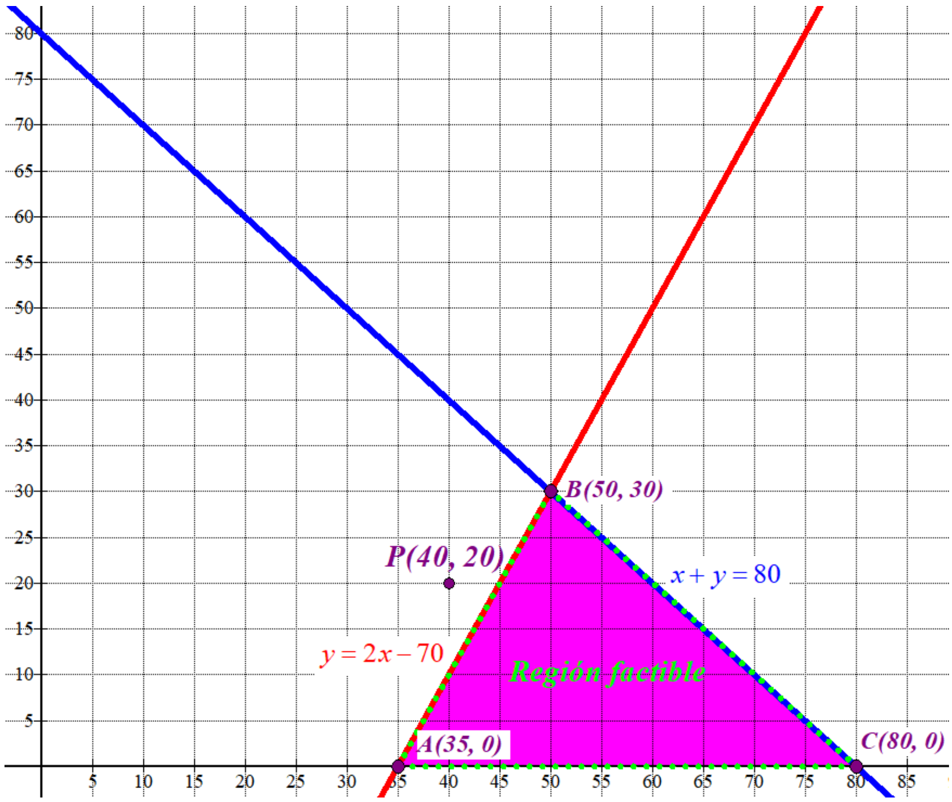
x	$y=2x-70$
35	0
50	30

$x+y=80$

x	$y=80$
0	80
50	30

$x \geq 0;\ y \geq 0$

Primer cuadrante



Como el punto P(40, 20) queda fuera de la región del plano en la que se encuentran todas las soluciones del problema planteado dicho resultado no nos permite aprobar el examen.

b) Queremos maximizar la función "preguntas sin contestar", como $x + y$ = "preguntas respondidas correcta o incorrectamente" la función es $f(x,y) = 80 - (x+y)$.

Valoramos la función en cada uno de los vértices de la región en busca del valor máximo.

A(35, 0) → $f(35,0) = 80 - (35+0) = 45$ ¡Máximo!

B(50, 30) → $f(50,30) = 80 - (50+30) = 0$

C(80, 0) → $f(80,0) = 80 - (80+0) = 0$

El número máximo de preguntas sin responder para poder aprobar es de 45. En este caso, se deberían responder las 35 de forma correcta y ninguna mal. Los puntos que se obtendrían son 35.

2A. Una empresa ingresa 500 miles de euros por cada tonelada de producto que vende. En cuanto a costes, tiene unos costes de producción, entre mano de obra y materia prima, de 250 miles de euros por cada tonelada que produce. Además, cada año debe pagar como impuestos el x% de sus ingresos, si ha vendido x toneladas de producto. Por último, la empresa tiene unos costes fijos anuales de 1125 miles de euros. Si f representa los beneficios (ingresos - costes) anuales, la producción máxima anual es de 40 toneladas y esta empresa vende cada año todo lo que produce, se pide:
a) **[1,75 puntos]** Obtener la expresión de la función f en función de x. Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo [0, 40].
b) **[0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe producir en un año para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que producir en un año para que el beneficio sea positivo?

a) En un año cualquiera, si la producción es de x toneladas, los ingresos son *500x* miles de euros. Por otro lado, los costes son:

- Costes de producción: *250x* miles de euros.
- Impuestos: $\frac{x}{100}\cdot\text{Ingresos} = \frac{x}{100}\cdot 500x = 5x^2$ miles de euros.
- Costes fijos: 1125 miles de euros.

con lo que el coste total en ese año es $250x+5x^2+1125$ y, por tanto, los beneficios son:

$$f(x) = 500x - \left(250x + 5x^2 + 1125\right) = -5x^2 + 250x - 1125$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición [0, 40].

$$f(0) = -1125 \text{ y } f(40) = -5\cdot 40^2 + 250\cdot 40 - 1125 = 875$$

Averiguamos los puntos de corte con el eje X.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = -5x^2 + 250x - 1125 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = -5x^2 + 250x - 1125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 50x + 225 = 0 \Rightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 900}}{2} = \frac{50 \pm 40}{2} = \begin{cases} \frac{50+40}{2} = 45 \notin [0,40] \\ \frac{50-40}{2} = 5 \in [0,40] \end{cases}$$

La gráfica corta el eje X en el punto (5, 0).

Estudiamos la evolución de la función usando su función derivada.

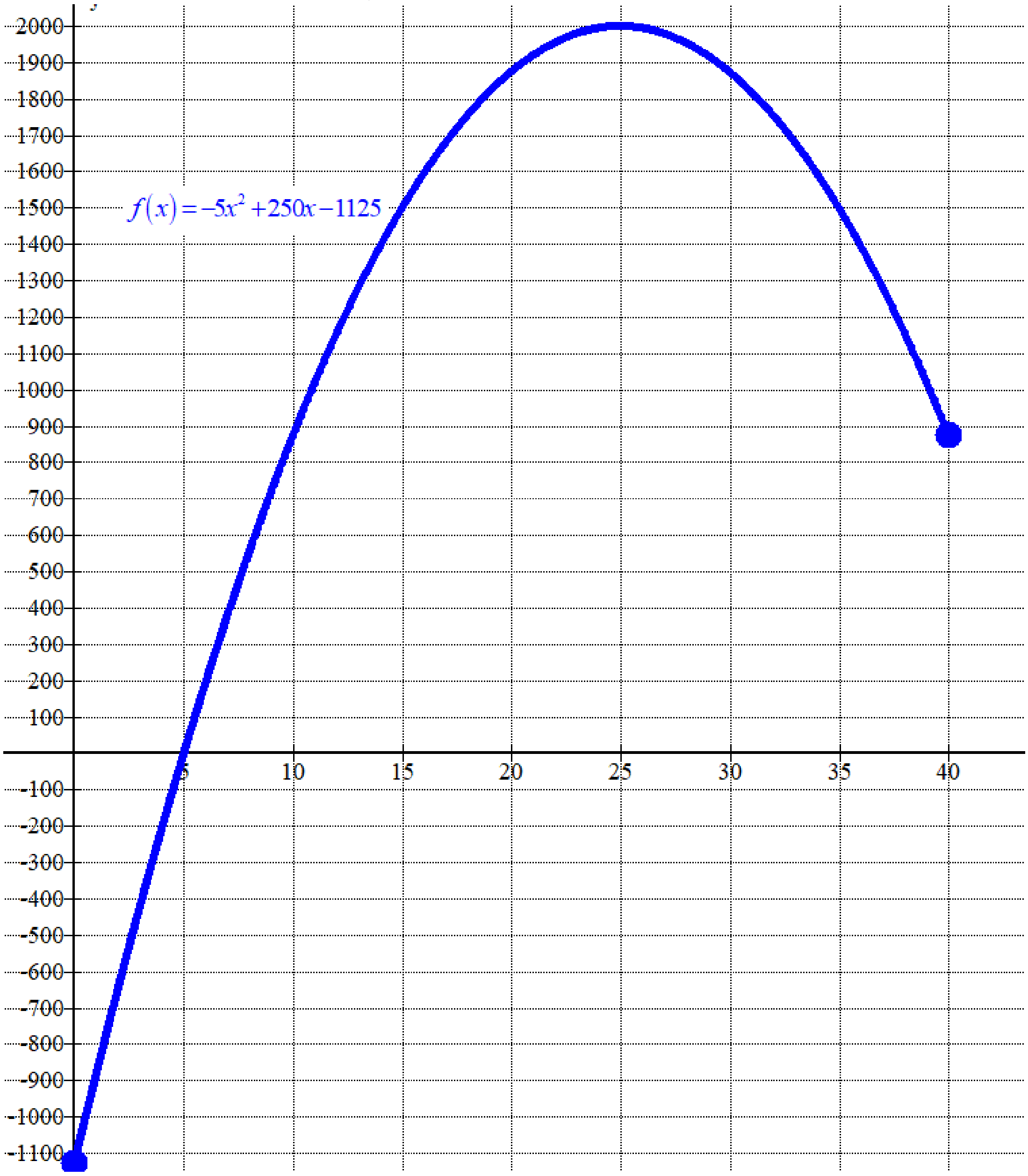
$$f'(x) = -10x + 250$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -10x + 250 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{250}{10} = 25}$$

En el intervalo (0, 25) tomamos $x = 10$ y la derivada vale $f'(10) = -100 + 250 = 150 > 0$. La función crece en (0, 25).
En el intervalo (25, 40) tomamos $x = 30$ y la derivada vale $f'(30) = -300 + 250 = -50 < 0$. La función decrece en (25, 40).

La función presenta un máximo relativo en $x = 25$.
Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = -5x^2 + 250x - 1125$
0	-1125
10	875
25	2000
30	1875
40	875



b) El máximo de la función está en el punto (25, 2000) que significa que hay que fabricar 25 toneladas para obtener un beneficio máximo de 2 000 000 €.
La función es positiva entre $x = 5$ y $x = 40$, lo que significa que para obtener beneficios hay que producir al menos 5 toneladas.

2B. Dada la función $f(x)=x^3-4x^2+3x$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que F(1) = 1.
b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre x = 0 y x = 4.

a) Calculamos la integral indefinida de $f(x)=x^3-4x^2+3x$.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int x^3-4x^2+3xdx=\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+K$$

Calculamos K para que F(1) = 1.

$$\left.\begin{array}{r} F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+K \\ F(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1^4}{4}-\frac{4}{3}\cdot 1^3+\frac{3}{2}\cdot 1^2+K=1 \Rightarrow \frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}+K=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K=1-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}=\frac{7}{12} \Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{12}}$$

La primitiva buscada es $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{12}$

b) La función es polinómica por lo que es continua y su dominio son todos los números reales.

Averiguamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3-4x^2+3x \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3-4x^2+3x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=x^3-4x^2+3x \Rightarrow 0=x\left(x^2-4x+3\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \to A(0,0) \\ x^2-4x+3=0 \to x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} \frac{4+2}{2}=3=x \to \boxed{B(3,0)} \\ \frac{4-2}{2}=1=x \to \boxed{C(1,0)} \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos la evolución de la función a través de su derivada: $f'(x)=3x^2-8x+3$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-8x+3=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-36}}{6}=\frac{8\pm 2\sqrt{7}}{6}=\begin{cases} \frac{8+2\sqrt{7}}{6}=\frac{4+\sqrt{7}}{3}\simeq 2.2 \\ \frac{8-2\sqrt{7}}{6}=\frac{4-\sqrt{7}}{3}\simeq 0.45 \end{cases}$$

En el intervalo $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$f'(0) = 3\cdot 0^2 - 8\cdot 0 + 3 = 3 > 0$.

La función crece en $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$f'(1) = 3\cdot 1^2 - 8\cdot 1 + 3 = -2 < 0$.

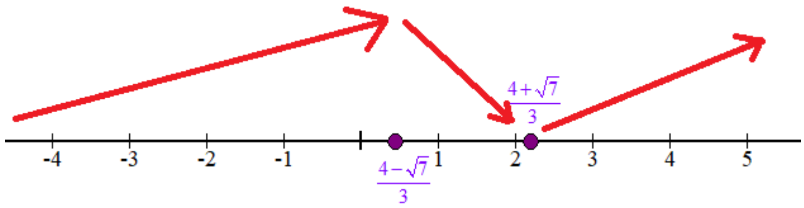
La función decrece en $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$f'(10) = 3\cdot 10^2 - 80 + 3 = 223 > 0$.

La función crece en $\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente:

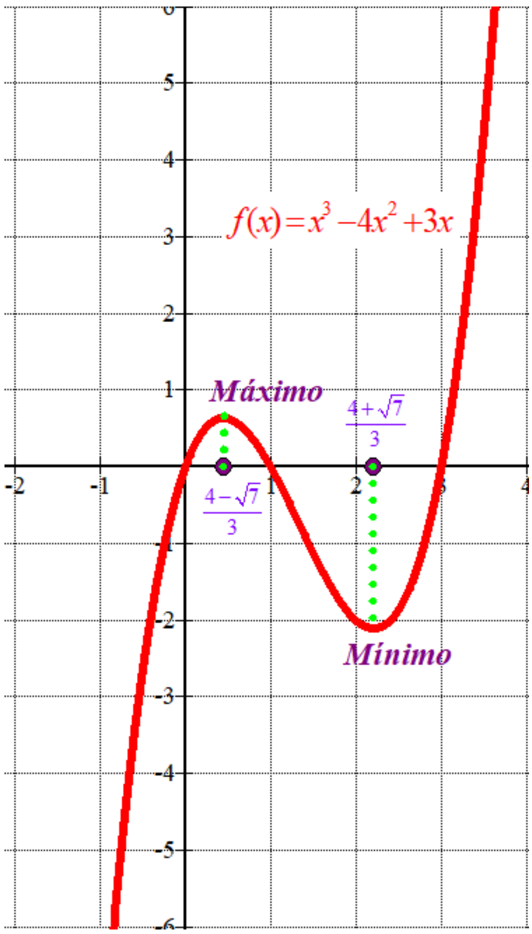


La función crece en $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$.

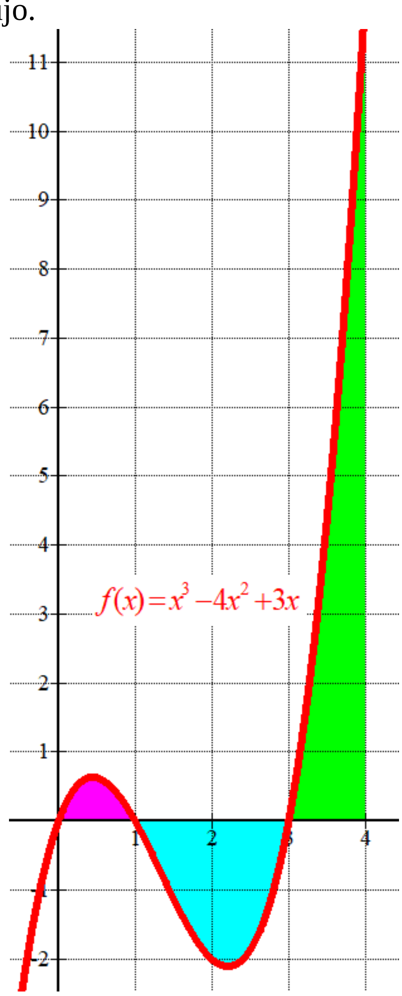
La función tiene un máximo relativo en $x = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ y un mínimo relativo en $x = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$
0	0
$\frac{4-\sqrt{7}}{3}$	0.63
1	0
$\frac{4+\sqrt{7}}{3}$	–2.11
3	0
4	12



Nos piden hallar el área coloreada en rosa, verde y azul del dibujo. Se obtiene como la suma de tres integrales definidas siguientes.



$$\acute{A}rea\ rosa=\int_0^1 x^3-4x^2+3x dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^4}{4}-\frac{4}{3}\cdot 1^3+\frac{3}{2}\cdot 1^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-\frac{4}{3}\cdot 0^3+\frac{3}{2}\cdot 0^2\right]=\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\boxed{\frac{5}{12}}$$

$$\acute{A}rea\ azul=\left|\int_1^3 x^3-4x^2+3x dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^3\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{3^4}{4}-\frac{4}{3}\cdot 3^3+\frac{3}{2}\cdot 3^2\right]-\left[\frac{1^4}{4}-\frac{4}{3}\cdot 1^3+\frac{3}{2}\cdot 1^2\right]\right|=\boxed{\frac{8}{3}}$$

$$\acute{A}rea\ verde=\int_3^{14} x^3-4x^2+3x dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_3^4=$$

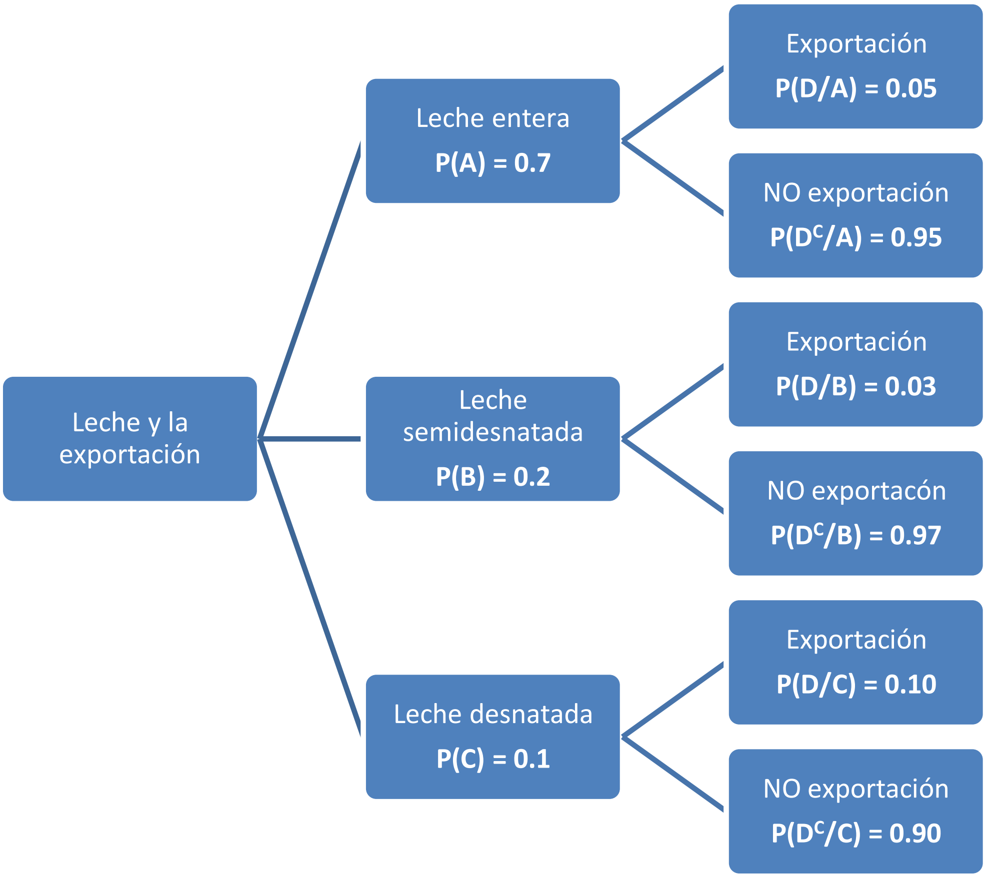
$$=\left[\frac{4^4}{4}-\frac{4}{3}\cdot 4^3+\frac{3}{2}\cdot 4^2\right]-\left[\frac{3^4}{4}-\frac{4}{3}\cdot 3^3+\frac{3}{2}\cdot 3^2\right]=\boxed{\frac{59}{12}}$$

El área total es la suma del área de las tres regiones.

$$\boxed{\text{Área} = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} + \frac{59}{12} = 8\ u^2}$$

3A. Una empresa láctea se encarga de procesar leche y envasarla en botellas. De estas, el 70% son de leche entera, el 20% de leche semidesnatada y el resto de leche desnatada. Además, se sabe que el 5% de las botellas de leche entera se exportan fuera del país, así como el 3% de las de leche semidesnatada y el 10% de las de leche desnatada.
a) **[1,25 puntos]** Si se elige una botella al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea exportada?
b) **[1,25 puntos]** Si se elige una botella al azar de entre las exportadas, ¿cuál es la probabilidad de que contenga leche semidesnatada?

Llamamos A = "Leche entera", B = "Leche semidesnatada", C = "Leche desnatada" y D = "Ser exportada".
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(D^C\right)=P(A)P\left(D^C/A\right)+P(B)P\left(D^C/B\right)+P(C)P\left(D^C/C\right)=$$

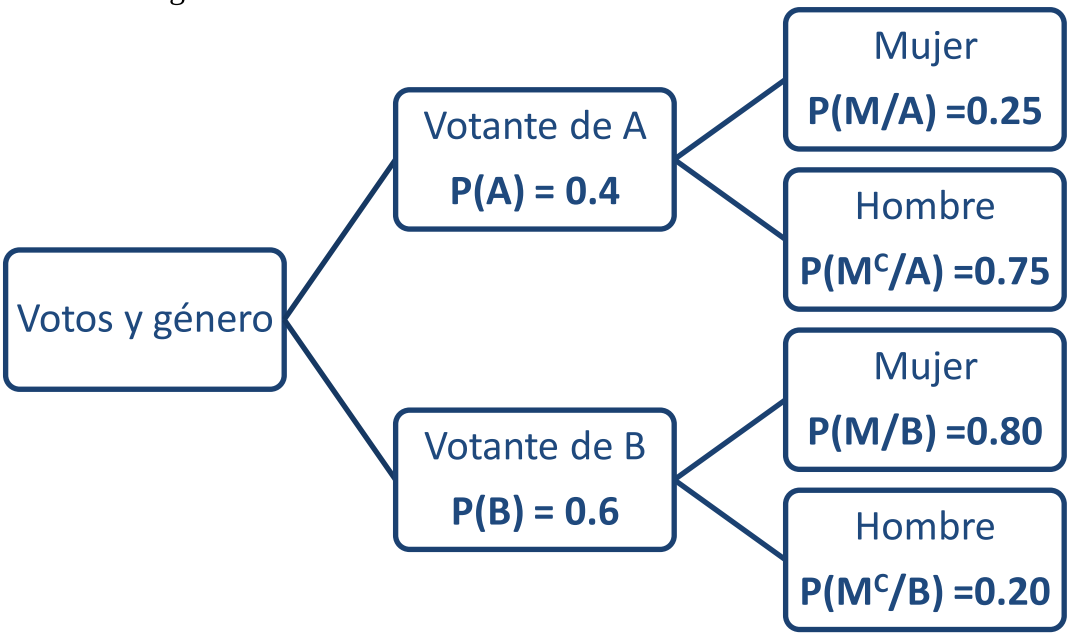
$$=0.7\cdot 0.95+0.2\cdot 0.97+0.1\cdot 0.90=\boxed{0.949}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{P(B)P(D/B)}{1-P\left(D^C\right)}=\frac{0.2\cdot 0.03}{1-0.949}=\boxed{\frac{2}{17}\simeq 0.118}$$

3B. En la segunda vuelta de unas elecciones presidenciales el 40% de los votantes votan al candidato A y el 60% restante al B. De los votantes del candidato A, el 25% son mujeres, mientras que un 20% de los votantes del candidato B son hombres.
a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar, sea mujer.
b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar entre los hombres, haya votado al candidato A.

Llamamos A = "Ser votante del partido A", B = "Ser votante del partido B", M = "Ser mujer" y M^C = "Ser hombre".
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(A)P(M/A)+P(B)P(M/B)=0.4\cdot 0.25+0.6\cdot 0.80=\boxed{0.58}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(A/M^C\right)=\frac{P\left(A\cap M^C\right)}{P\left(M^C\right)}=\frac{P(A)P\left(M^C/A\right)}{1-P(M)}=\frac{0.4\cdot 0.75}{1-0.58}=\boxed{\frac{5}{7}\simeq 0.714}$$

4A Para estudiar el tiempo medio que tarda la compañía PhoneFun en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono, se consideró una muestra aleatoria de 200 clientes y se obtuvo que el tiempo medio de portabilidad para ellos fue de 40 horas. Se supone que el tiempo de portabilidad se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 10 horas.*
a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio de portabilidad en esa compañía, al 90% de confianza.
b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el número mínimo de clientes en la muestra necesario para estimar el verdadero tiempo medio de portabilidad en esa compañía mediante un intervalo de amplitud menor o igual a 2 horas y un nivel de confianza del 90%?

Sea X = El tiempo medio que tarda la compañía PhoneFun en hacer efectiva la portabilidad, en horas.
X = N(μ, 10)

a) Media muesral = $\bar{x} = 40\,horas$; Tamaño de la muestra = $n = 200$ clientes

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.64}$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; **F(1,64) = 0,95**; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

El error es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1.64 \cdot \frac{10}{\sqrt{200}} = 1.16\ horas$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(40 - 1.16,\ 40 + 1.16\right) = \left(38.84,\ 41.16\right)$$

Es decir, tenemos una confianza del 90% de que el tiempo que tarda la compañía en hacer una portabilidad está entre 38.84 y 41.16 horas.

b) Si el intervalo de confianza debe tener una amplitud menor o igual a 2 horas el error debe ser menor o igual a 1.
Para un nivel de confianza del 90% hemos calculado en el apartado anterior que $z_{\alpha/2} = 1.64$.
Utilizamos la fórmula del error.

$$\left.\begin{array}{l} Error = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.64 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{n}} \\ Error = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 1.64 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 16.4 \Rightarrow \boxed{n = 16.4^2 = 268.96}$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y mayor que 268.96 tenemos que elegir una muestra de, al menos, 269 clientes.

.

4B. En una determinada ciudad se ha seleccionado una muestra aleatoria de 300 hogares, de los que 240 reciclan sus envases de plástico habitualmente. *
a) **[1,5 puntos]** Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de hogares que reciclan el plástico habitualmente en esa ciudad.
b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría a la amplitud del intervalo si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; **F(1,96) = 0,975**; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

a) Obtenemos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

La proporción muestral es $p = \dfrac{240}{300} = 0.8$ y $1-p = 1-0.8 = 0.2$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{300}} \simeq 0.045$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error,\ p + Error) = (0.8-0.045,\ 0.8+0.045) = (0.755,\ 0.845)$$

Así pues, tenemos una confianza del 95% de que el porcentaje de hogares que recicla el plástico está entre el 75.5% y el 84.5 %.

b) El error de estimación es 0.045.

Si en la fórmula del error $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ mantenemos constante la proporción muestral y el nivel de confianza (y por tanto el $z_{\alpha/2}$) entonces al aumentar el tamaño muestral (n) disminuye el error, pues la variable “n” está en el denominador de la expresión
La amplitud del intervalo es el doble del error y por tanto también disminuye al aumentar el tamaño muestral.