Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. Un bar realiza todas las semanas un pedido de cerveza y vino a uno de sus dos proveedores. El proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro. El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1000 euros, mientras que si lo realiza al proveedor B paga $500m$ euros.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean los litros de cerveza y vino, respectivamente, comprados cada semana.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que el precio del litro de vino en el proveedor B sea también de dos euros? En caso afirmativo, ¿cuánto vino compra por semana, si el pedido semanal de cerveza es de 400 litros? Determina la cantidad de cerveza y vino comprada semanalmente en cualquier otro caso, es decir, cuando el precio del litro de vino en el proveedor B no sea de dos euros.

1B. Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasas. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M_1 y M_2. Se sabe que cada lata de la marca M_1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M_2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además, se sabe que el precio de cada lata de la marca M_1 es de 22 euros y que el precio de cada lata de la marca M_2 es de 24 euros.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2?

b) **[0,75 puntos]** ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

2A. Se ha investigado la energía que produce una placa solar (f) en función del tiempo transcurrido, en horas, desde que amanece (x), obteniéndose que:

$$f(x)=\begin{cases} 10x-x^2 & si \ \ 0\le x\le 8 \\ \dfrac{a}{x^2} & si \ 8< x\le 12 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determina el valor de a para que la energía producida varíe de forma continua al variar el tiempo transcurrido desde que amanece.

b) **[1,75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánta energía produce en ese momento?

2B. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 10$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3{,}2$ y $x = -2$.

3A. Los cursos de monitor de esquí en determinada estación se reparten en tres turnos, A, B y C. Los alumnos del turno A representan el 20% del alumnado, los del turno B representan el 30% del alumnado y los del turno C representan el 50% restante. Además, se sabe que el porcentaje de alumnos que aprueban el curso es del 95% en el turno A, 90% en el B y 92% en el C. Si se elige un alumno al azar,

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso y no sea del turno B?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso o sea del turno B?

3B. En el primer curso de un grado, el 60% de los estudiantes son mujeres y el 40% restante son hombres. Además, se sabe que el 80% de las mujeres y el 75% de los hombres aprobaron el examen de matemáticas. Si se elige un estudiante de ese curso al azar,

a) **[1,25 puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya suspendido matemáticas?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado matemáticas?

4A. Se quiere hacer un estudio para estimar el porcentaje de declaraciones de la renta que son fraudulentas.*

a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de declaraciones fraudulentas a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,026 y un nivel de confianza del 90%?

b) **[1,5 puntos]** En una muestra aleatoria de 1000 declaraciones se obtuvo que 110 de ellas eran fraudulentas. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de declaraciones fraudulentas.

4B. Una fábrica de quesos quiere estudiar el tiempo que tarda el producto en estropearse si no se envasa. Para ello, considera una muestra de 324 quesos y observa que el tiempo medio hasta que se estropean es de 27 días. Se supone además que el tiempo hasta que se estropea el producto sigue una distribución normal con desviación típica 4 días.*

a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio que tarda en estropearse este tipo de queso al 99% de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 días y un nivel de confianza del 99%?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

SOLUCIONES:

1A. Un bar realiza todas las semanas un pedido de cerveza y vino a uno de sus dos proveedores. El proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro. El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a *m* euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1000 euros, mientras que si lo realiza al proveedor B paga 500*m* euros.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas *x* e *y* sean los litros de cerveza y vino, respectivamente, comprados cada semana.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de *m* el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que el precio del litro de vino en el proveedor B sea también de dos euros? En caso afirmativo, ¿cuánto vino compra por semana, si el pedido semanal de cerveza es de 400 litros? Determina la cantidad de cerveza y vino comprada semanalmente en cualquier otro caso, es decir, cuando el precio del litro de vino en el proveedor B no sea de dos euros.

a) Llamamos "x" a los litros de cerveza comprados cada semana e "y" a los litros de vino.

"*El proveedor A le vende la cerveza a 1 euro el litro y el vino a 2 euros el litro. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1000 euros*" → $x+2y=1000$

"*El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A (1 €), pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor B paga 500m euros*" → $x+my=500m$

Juntamos las ecuaciones en un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas, pero con un parámetro "*m*".

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=1000 \\ x+my=500m \end{array}\right\}$$

b) Triangulamos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=1000 \\ x+my=500m \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^{\text{a}} - \text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{lll} x & +my & =500m \\ -x & -2y & =-1000 \\ \hline & (m-2)y & =500m-1000 \end{array} \\ \text{Nueva ecuación 2}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=1000 \\ (m-2)y=500m-1000 \end{array}\right\}$$

Nos planteamos dos casos diferentes.

CASO 1. $m\neq 2$

En este caso podemos despejar "y" del sistema y hallar su valor y después el de "x". El sistema tendría solución única.

CASO 2. $m=2$

En este caso el sistema queda $\left.\begin{array}{l} x+2y=1000 \\ x+2y=1000 \end{array}\right\}$ donde las dos ecuaciones son la misma y por tanto el sistema tiene solución pero son infinitas.

El sistema tiene solución para cualquier valor de *m*, pero solo es única para *m* distinto de 2.

Si el proveedor B vende el vino a 2 € significa que *m = 2*, por lo que en ese caso el sistema tiene infinitas soluciones.

Si compra 400 litros de cerveza → $x = 400$ → $400 + 2y = 1000 \Rightarrow 2y = 600 \Rightarrow y = 300$. Si compra 400 litros de cerveza compraría 300 de vino.

Si el precio del vino no son 2 € estaríamos en el caso de $m \neq 2$ entonces el sistema es compatible determinado y podemos hallar su solución.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=1000 \\ x+my=500m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \quad + \quad 2y=1000 \\ \quad (m-2)\,y=500m-1000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \quad + \quad 2y=1000 \\ \boxed{y=\dfrac{500m-1000}{m-2}=\dfrac{500(m-2)}{m-2}=500} \end{array}\right\} \Rightarrow x+2\cdot 500=1000 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Compraría 500 litros de vino y ninguno de cerveza.

1B. Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasas. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M_1 y M_2. Se sabe que cada lata de la marca M_1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M_2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además, se sabe que el precio de cada lata de la marca M_1 es de 22 euros y que el precio de cada lata de la marca M_2 es de 24 euros.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2?

b) **[0,75 puntos]** ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

a)

Llamamos "x" al número de latas diarias de M_1 e "y" al número de latas de M_2.
Hacemos una tabla.

	Hidratos de carbono	**Proteínas**	**Grasas**	**Coste**
Nº latas de M1 (x)	$3x$	$3x$	x	$22x$
Nº latas de M_2 (y)	y	$9y$	y	$24y$
TOTALES	$3x+y$	$3x+9y$	$x+y$	$22x+24y$

Obtenemos las inecuaciones que definen la región factible.

"*Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasas*" → $3x+y\geq 6;\quad 3x+9y\geq 8;\quad x+y\geq 4$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\quad y\geq 0$

La región factible es la solución del sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y\geq 6 \\ 3x+9y\geq 18 \\ x+y\geq 4 \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región.

$3x+y=6$

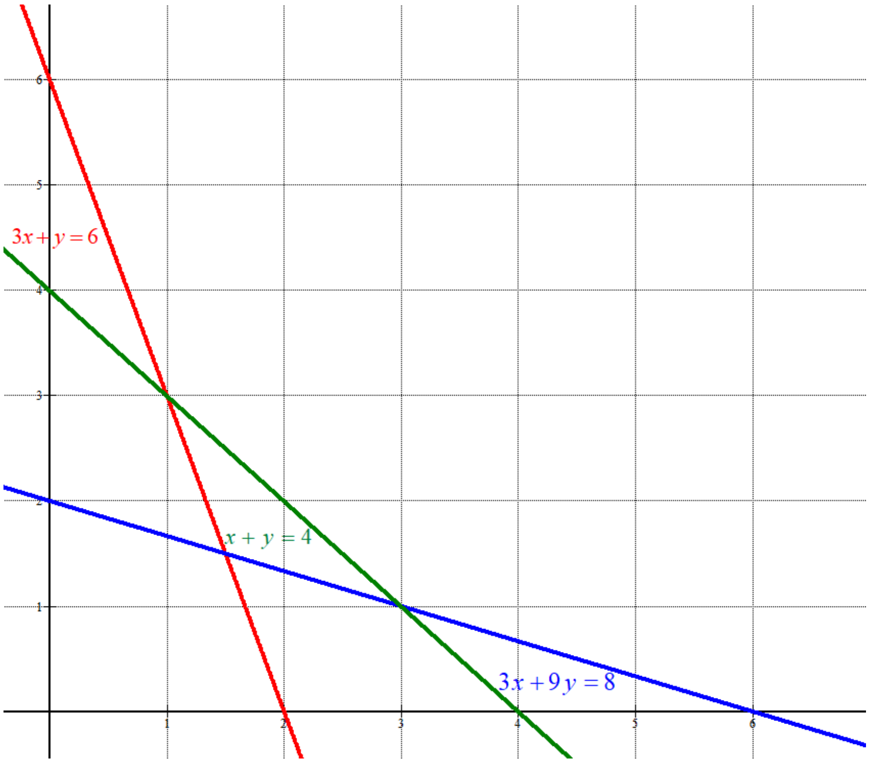
x	$y=6-3x$
0	6
1	3

$3x+9y=18$

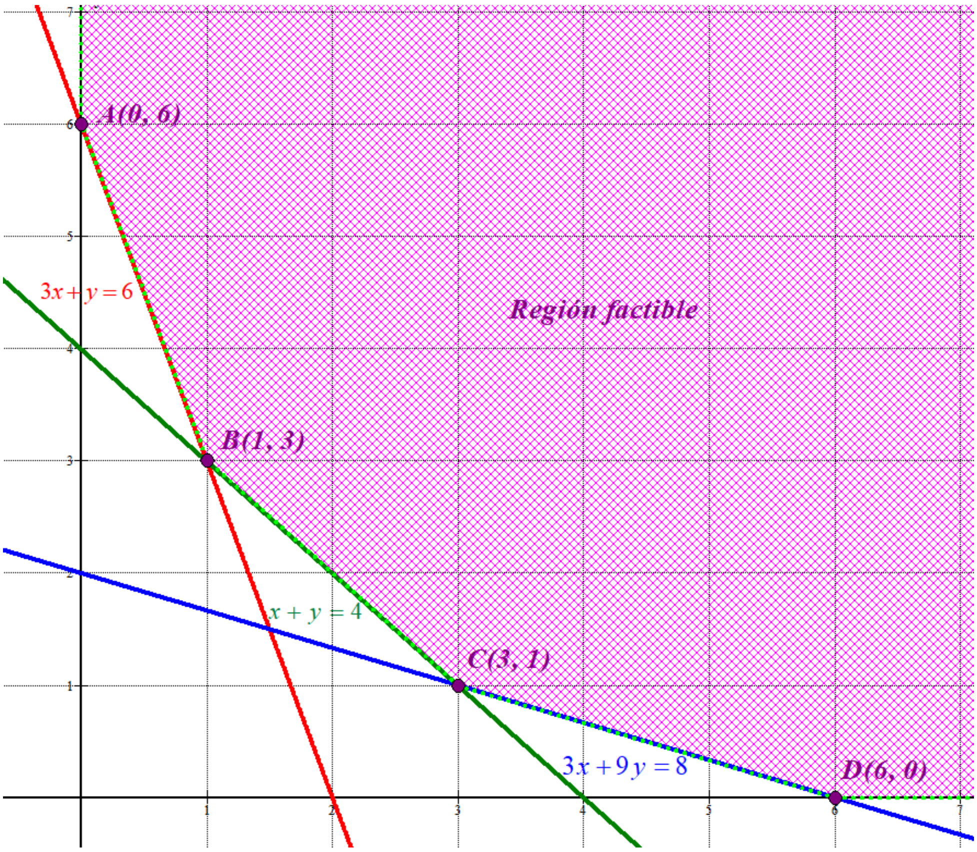
x	$y=\frac{18-3x}{9}$
3	1
6	0

$x+y=4$

x	$y=4-x$
1	3
3	1



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{ll} 3x+y\geq 6 & \rightarrow \textit{Por encima} \\ 3x+9y\geq 18 & \rightarrow \textit{Por encima} \\ x+y\geq 4 & \rightarrow \textit{Por encima} \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 & \rightarrow \textit{Primer cuadrante} \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de las rectas azul, roja y verde.
La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2?
Esta pregunta se traduce en plantearnos si el punto (1, 2) está dentro de la región factible y se observa que no está en la región coloreada de rosa, por lo que no se le puede dar 1 lata de M_1 y dos latas de la marca M_2.

b) La función a minimizar es el coste que viene dado en función del número de latas por la expresión: $C(x,y) = 22x + 24y$.
Valoramos esta función en cada vértice para localizar el valor mínimo.

A(0, 6) → $C(0,6) = 144$
B(1, 3) → $C(1,3) = 22 + 72 = 94$
C(3, 1) → $C(3,1) = 66 + 24 = 90$
D(6, 0) → $C(6,0) = 132$

El coste mínimo son 90 € que se consigue en el vértice C(3, 1), que significa darle 3 latas de M_1 y 1 lata de M_2.

¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

El número de latas de M_1 es "x". Si deseamos minimizar "x" la función objetivo es $f(x,y) = x$.

La valoramos en cada vértice y vemos el mínimo.

A(0, 6) → $f(0,6) = 0$
B(1, 3) → $f(1,3) = 1$
C(3, 1) → $f(3,1) = 3$
D(6, 0) → $f(6,0) = 6$

El valor mínimo se alcanza en el vértice A(0, 6), lo que significa una dieta con solo 6 latas de la marca M_2.

2A. Se ha investigado la energía que produce una placa solar (*f*) en función del tiempo transcurrido, en horas, desde que amanece (*x*), obteniéndose que:

$$f(x)=\begin{cases}10x-x^2 & si\ \ 0\le x\le 8\\ \dfrac{a}{x^2} & si\ 8<x\le 12\end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determina el valor de *a* para que la energía producida varíe de forma continua al variar el tiempo transcurrido desde que amanece.

b) **[1,75 puntos]** Considerando el valor de *a* obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función *f* en todo su dominio. ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánta energía produce en ese momento?

a) La función *f* viene dada por un polinomio en el intervalo [0,8] y por un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula en el intervalo (8,12], con lo que el único posible punto de discontinuidad es $x = 8$.
Hacemos que la función sea continua en $x = 8$.

$$\left.\begin{array}{l} f(8)=80-8^2=16\\ \lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^-}10x-x^2=16\\ \lim\limits_{x\to 8^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^+}\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{a}{8^2}=\dfrac{a}{64}\\ \lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^+} f(x)=f(8)\end{array}\right\}\Rightarrow 16=\frac{a}{64}\Rightarrow \boxed{a=1024}$$

b) Para $a = 1024$ la función es $f(x)=\begin{cases}10x-x^2 & si\ \ 0\le x\le 8\\ \dfrac{1024}{x^2} & si\ 8<x\le 12\end{cases}$.

Puntos de corte con los ejes.

Si $x = 0$ → $f(0)=0$. Un punto de corte es (0, 0).

Si $y = 0$ → $\begin{cases}10x-x^2=0\Rightarrow x(10-x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\to(0,0)\\ x=10,\ \text{No es válido pues } 10>8\end{cases}\\ \dfrac{1024}{x^2}=0\quad \text{¡¡No es posible!!}\end{cases}$

Solo tiene un punto de corte con los ejes y es el punto O(0, 0).

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x)=\begin{cases}10-2x & si\ \ 0\le x<8\\ -\dfrac{2048}{x^3} & si\ 8<x\le 12\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}10-2x=0\to x=5 & si\ \ 0\le x<8\\ -\dfrac{2048}{x^3}=0\ \ \text{¡¡Imposible!!} & si\ 8<x\le 12\end{cases}$$

En el intervalo (0, 5) la derivada es positiva → $f'(1) = 10 - 2 = 8 > 0$, por lo que la función crece.
En el intervalo (5, 8) la derivada es negativa → $f'(6) = 10 - 12 = -2 < 0$, por lo que la función decrece.

En el intervalo (8, 12) la derivada es negativa → $f'(10) = -\dfrac{2048}{10^3} < 0$, por lo que la función decrece.

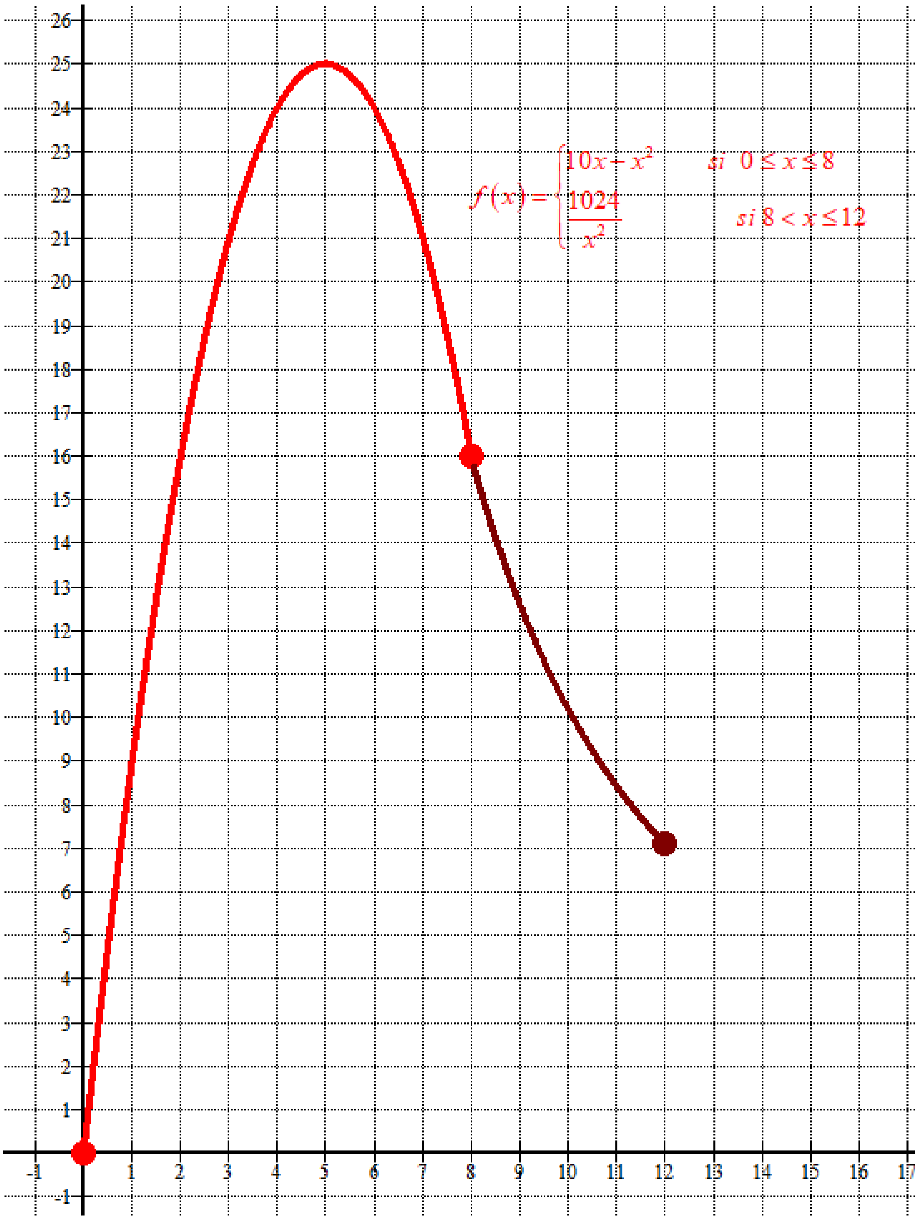
Tabla de valores.

si $0 \le x \le 8$

x	$y = 10x - x^2$
0	0
2	16
5	25
8	16

si $8 < x \le 12$

x	$y = \dfrac{1024}{x^2}$
9	12.64
10	10.24
12	7.11



Se observa que el máximo de energía se produce a las 5 horas produciendo 25 de energía.

2B. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva *F* de *f* verificando que *F(2) = 10*.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función *f* en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre *x = −3,2* y *x = −2*.

a)

$$\left.\begin{array}{r} F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 + 3x^2 dx = \dfrac{x^4}{4} + x^3 + K \\ F(2) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 = \frac{2^4}{4} + 2^3 + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = 12 + K \Rightarrow K = -2 \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2}$$

b)

Dominio.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$, pues es una función polinómica.

Puntos de corte con los ejes.

Si *x = 0* → $f(0) = 0$. El punto de corte es O(0, 0)

Si *y = 0* → $0 = x^3 + 3x^2 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ o \\ x = -3 \end{cases}$. El otro punto de corte es (–3, 0)

Crecimiento y decrecimiento.

Derivamos y estudiamos el signo de la derivada.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f\,'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f\,'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

En $(-\infty, -2)$ tomamos *x = –3* y la derivada vale $f\,'(-3) = 3(-3)^2 - 18 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -2)$.

En $(-2, 0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f\,'(-1) = 3(-1)^2 - 6 = -3 < 0$. La función decrece en $(-2, 0)$.

En $(0, +\infty)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f\,'(3) = 3(3)^2 + 18 = 45 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

Extremos relativos.

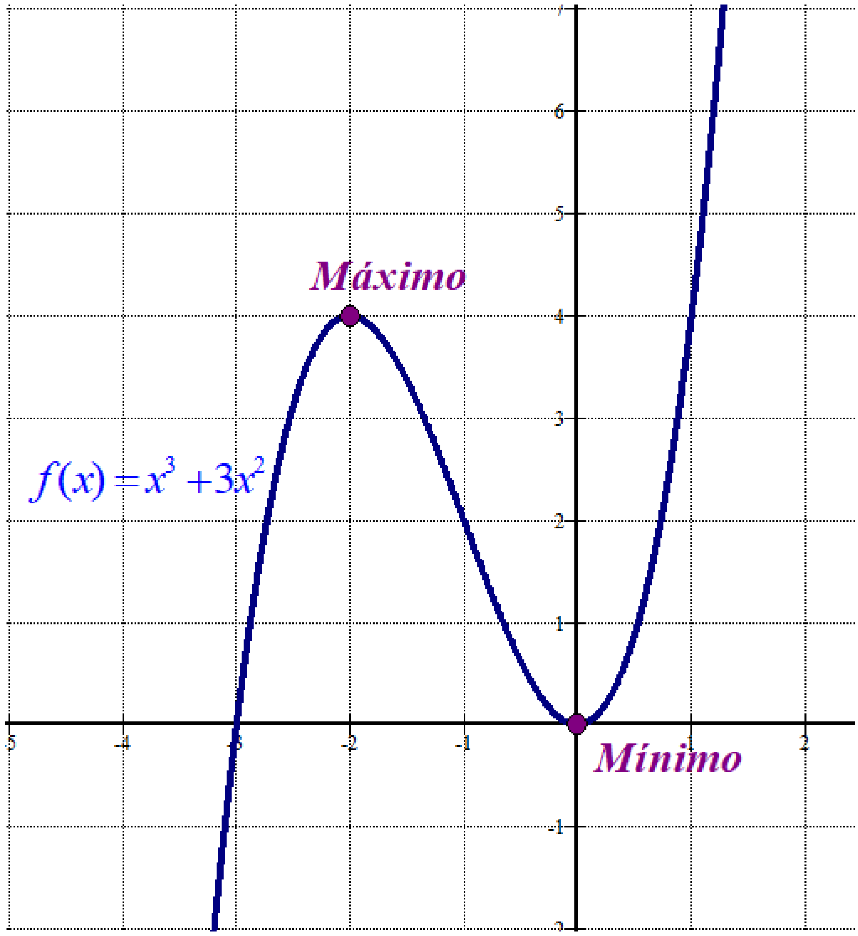
La función tiene un máximo relativo en *x = –2* y un mínimo relativo en *x = 0*.

Calculamos sus límites en el infinito.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 + 3x^2 = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 + 3x^2 = -\infty$

Tabla de valores.

x	$y = x^3 + 3x^2$
-3	0
-2	4 máximo
-1	2
0	0 mínimo
1	4



La región de la cual nos piden calcular el área la dividimos en dos partes, pues en $x = -3$ la función corta el eje OX.

$$\int_{-3.2}^{-3} x^3 + 3x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_{-3.2}^{-3} =$$

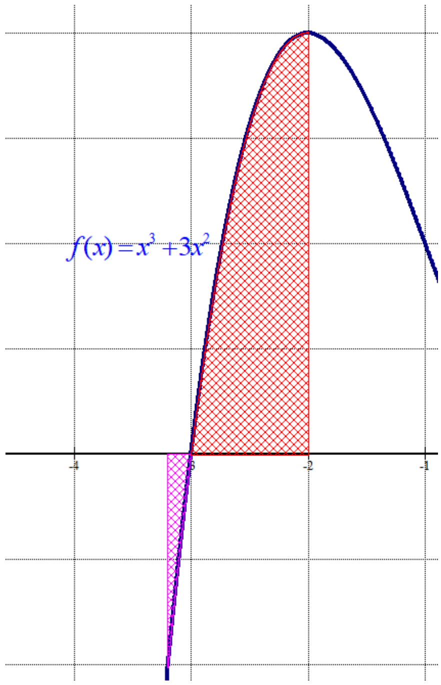
$$= \left[\frac{(-3)^4}{4} + (-3)^3\right] - \left[\frac{(-3.2)^4}{4} + (-3.2)^3\right] =$$

$$= \frac{81}{4} - 27 - 26.2144 + 32.768 = \boxed{-0.1964}$$

$$\int_{-3}^{-2} x^3 + 3x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_{-3}^{-2} =$$

$$= \left[\frac{(-2)^4}{4} + (-2)^3\right] - \left[\frac{(-3)^4}{4} + (-3)^3\right] =$$

$$= 4 - 8 - \frac{81}{4} + 27 = \boxed{2.75}$$



El área de la región pedida es la suma de los valores absolutos de las integrales definidas calculadas.

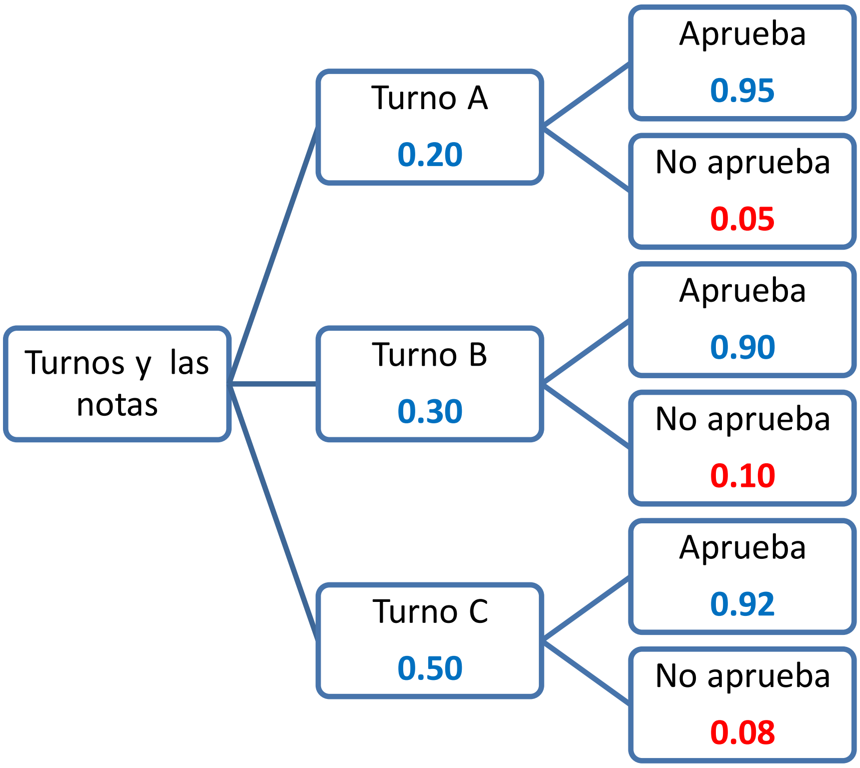
Área = 2.75 + 0.1964 = 2.9464 u^2.

3A. Los cursos de monitor de esquí en determinada estación se reparten en tres turnos, A, B y C. Los alumnos del turno A representan el 20% del alumnado, los del turno B representan el 30% del alumnado y los del turno C representan el 50% restante. Además se sabe que el porcentaje de alumnos que aprueban el curso es del 95% en el turno A, 90% en el B y 92% en el C. Si se elige un alumno al azar,

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso y no sea del turno B?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso o sea del turno B?

a) Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A = "Ser del turno A", B = "Ser del turno B" y C = "Ser del turno C".

D = "Aprobar el curso"

a) Si no es del grupo B debe ser del grupo A o C.

$$P\left(D\cap\overline{B}\right)=P(A\cap D)+P(C\cap D)=P(A)P(D/A)+P(C)P(D/C)=$$

$$=0.20\cdot 0.95+0.50\cdot 0.92=\boxed{\frac{13}{20}=0.65}$$

b)

$$P(D\cup B)=P(D)+P(B)-P(D\cap B)=$$

$$=\left[P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)\right]+P(B)-P(B)P(D/B)=$$

$$=[0.20\cdot 0.95+0.30\cdot 0.90+0.50\cdot 0.92]+0.3-0.3\cdot 0.9=\boxed{\frac{19}{20}=0.95}$$

3B. En el primer curso de un grado, el 60% de los estudiantes son mujeres y el 40% restante son hombres. Además se sabe que el 80% de las mujeres y el 75% de los hombres aprobaron el examen de matemáticas. Si se elige un estudiante de ese curso al azar,

a) **[1,25 puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya suspendido matemáticas?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado matemáticas?

Pasamos los porcentajes a valores absolutos. Y así poder aplicar la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades.
Suponemos 100 estudiantes, de ellos 60 son mujeres y 40 hombres.
De las 60 mujeres el 80 % aprueban matemáticas. 80 % de 60 es 0.8 · 60 = 48. Hay 48 mujeres que aprueban matemáticas.
De los 40 hombres el 75 % aprueban matemáticas. 75 % de 40 es 0.75 · 40 = 30. Hay 30 hombres que aprueban matemáticas.
Ponemos estos datos en una tabla para hallar el resto de datos.

	Aprueba matemáticas	No aprueba matemáticas	
Mujer	48		60
Hombre	30		40
			100

Completamos la tabla.

	Aprueba matemáticas	No aprueba matemáticas	
Mujer	48	**12**	60
Hombre	30	**10**	40
	78	**22**	100

a) Hay 10 hombres que suspenden matemáticas de 100 estudiantes.

$$P(Sea\ hombre\ y\ haya\ suspendido\ matemáticas) = \boxed{\frac{10}{100} = 0.1}$$

b) Hay 78 aprobados en matemáticas de 100 estudiantes.

$$P\left(haya\ aprobado\ matemáticas\right) = \boxed{\frac{78}{100} = 0.78}$$

4A. Se quiere hacer un estudio para estimar el porcentaje de declaraciones de la renta que son fraudulentas.*

a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de declaraciones fraudulentas a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,026 y un nivel de confianza del 90%?

b) **[1,5 puntos]** En una muestra aleatoria de 1000 declaraciones se obtuvo que 110 de ellas eran fraudulentas. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de declaraciones fraudulentas.

a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow \alpha/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}64}$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; **F(1,64) = 0,95**; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Como la proporción muestral no es conocida consideramos $p = 0'5$ y $1-p = 1-0{,}5 = 0{,}5$

El error sigue la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = 0{,}026 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = \frac{0.026}{1.64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.5 \cdot 0.5}{n} = \left(\frac{0.026}{1.64}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.026}{1.64}\right)^2} = 994.67$$

Debemos de tomar una muestra de un mínimo de 995 declaraciones.

b) Ya hemos obtenido $z_{\alpha/2}$ para el nivel de confianza del 90 %: $z_{\alpha/2} = 1.64$

La proporción muestral es $p = \frac{110}{1000} = 0.11$ y $1-p = 1-0.11 = 0.89$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.11 \cdot 0.89}{1000}} \simeq 0.0162$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error,\ p + Error) = (0.11 - 0.0162,\ 0.11 + 0.0162) = (0.0937,\ 0.1262)$$

4B. Una fábrica de quesos quiere estudiar el tiempo que tarda el producto en estropearse si no se envasa. Para ello, considera una muestra de 324 quesos y observa que el tiempo medio hasta que se estropean es de 27 días. Se supone además que el tiempo hasta que se estropea el producto sigue una distribución normal con desviación típica 4 días.*

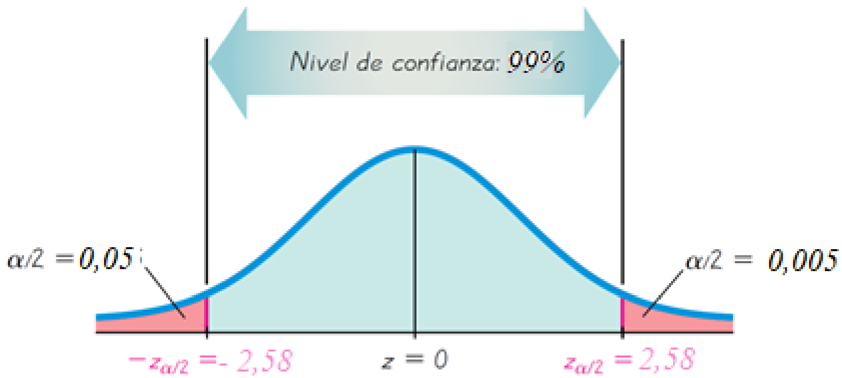
a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio que tarda en estropearse este tipo de queso al 99% de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 días y un nivel de confianza del 99%?

Sea X = Tiempo que tarda el producto en estropearse si no se envasa en días.
X = N(μ, 4)

a) Media muesral = $\bar{x} = 27\,días$; Tamaño de la muestra = $n = 324$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.



1 – ∝ = 0,99 → ∝ = 0,01 →∝/2 = 0’005 →1 – ∝/2 = 0,995 → $z_{\alpha/2}$ = **2,58**

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y **F(2,58) = 0,995**.

El error es

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 2.58\cdot\frac{4}{\sqrt{324}} = 0.573\,días$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(27 - 0.573,\ 27 + 0.573\right) = \left(26.427,\ 27.573\right)$$

El intervalo de confianza es $(26.427, 27.573)$. es decir, tenemos una confianza del 99% de que el tiempo medio hasta que se estropea está entre 26,427 y 27,573 días.

b) Con el mismo nivel de confianza del 99 % tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.58$.

El error es de 0.5 días, lo sustituimos en la fórmula y despejamos la “n”.

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 2.58\cdot\frac{4}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 2.58\cdot\frac{4}{0.5} \Rightarrow n = \left(2.58\cdot\frac{4}{0.5}\right)^2 \simeq 426.01$$

A partir de 427 quesos se consigue un error menor de 0.5 días.