MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios son resueltos utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

OPCIÓN A

1. Un librero vende 84 libros a dos precios distintos: unos a $5m$ euros y otros a $4m$ euros, obteniendo por la venta 3105 euros.

a) **[1 punto]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de libros de cada tipo vendidos.

b) **[2 puntos]** Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de los libros fuese 45 y 36 euros, respectivamente? Resuelve el sistema para $m = 9$. ¿Cuántos libros vendió de cada tipo?

Solución:

a) Si representamos por x e y el número de libros de cada tipo (precio $5m$ y precio $4m$), respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 84 \\ 5mx+4my & = & 3105 \end{array}\right.$$

b) La discusión de este sistema es hecha habitualmente por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 84 \\ 5m & 4m & 3105 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 84 \\ 0 & -m & 3105-420m \end{array}\right)$$

Como $-m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ se tiene que:

  - Si $m = 0$, la última fila representa una ecuación que es imposible $(0x+0y = 3105)$, con lo que el sistema es imcompatible.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 5m & 4m \end{array}\right| = -m = 0 \Longleftrightarrow m = 0$$

se tiene que:

  - Para $m = 0$, como

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 84 \\ 0 & 3105 \end{array}\right| = 3105 \neq 0 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

  por lo que el sistema es incompatible.
  - Para $m \neq 0$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A) = 2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ n$^{\text{o}}$ incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = 0$	$S.I.$
$m \neq 0$	$S.C.D.$

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq 0$ y dicha solución es siempre única. En concreto tiene solución para el caso $m = 9$, con lo que es posible que el precio de los libros fuese $45 = 5m = 5 \cdot 9$ y $36 = 4m = 4 \cdot 9$ euros, siempre que las soluciones obtenidas en ese caso sean números enteros no negativos.

Si $m = 9$, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 9$, se tiene que:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 84 \\ 0 & -9 & -675 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 84 \\ & - & 9y & = & -675 \end{array}\right.$$
Resolviendo este sistema escalonado:
$$\left\{\begin{array}{l} y = 675/9 = 75 \\ x = 84 - 75 = 9 \end{array}\right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = -m$, con lo que si $m = 9$ se tiene que $|A| = -9$.
Por otro lado se tiene que
$$|A_x| = \begin{vmatrix} 84 & 1 \\ 3105 & 36 \end{vmatrix} = -81, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 84 \\ 45 & 3105 \end{vmatrix} = -675.$$
Por tanto, la solución es:
$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-81}{-9} = 9, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-675}{-9} = 75.$$

Así, si $m = 9$, habría vendido 9 libros de los de 45 euros y 75 libros de los de 36 euros.

---

2. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

a) Como $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, entonces $F(x) = x^4/4 - x^3 + x^2 + C$, con lo que $F(2) = 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$ y, por tanto, $F(x) = x^4/4 - x^3 + x^2 + 1$.

b) El dominio de f son todos los números reales, puesto que está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como $f(-x) = -x^3 - 3x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, con lo que f no es una función simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

La función f corta al eje de ordenadas en el punto $(0, f(0))$, es decir, en el punto $(0,0)$. Además como $f(x) = x(x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = 1$ o $x = 2$, se tiene que f corta al eje de abscisas en los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(2,0)$.

En cuanto a las asíntotas, no tiene asíntotas verticales, puesto que no tiene puntos de discontinuidad. Tampoco tiene asíntotas horizontales, puesto que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3-3x^2+2x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3-3x^2+2x) = -\infty.$$

Tampoco tiene asíntotas oblicuas, puesto que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-3x^2+2x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}(x^2-3x+2) = +\infty.$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando los puntos críticos. Para ello,

$$f'(x) = 3x^2-6x+2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}42 \quad \text{o} \quad x = 1+\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}58$$

Para averiguar si estos puntos son un mínimo o un máximo relativo, procedemos por el criterio de la segunda derivada. Así, al ser $f''(x) = 6x-6$, se tiene que $f''(0{,}42) < 0$ y, por tanto $x = 0{,}42$ es un máximo relativo; además $f''(1{,}58) > 0$ y, por tanto $x = 1{,}58$ es un mínimo relativo. De lo anterior se deduce que f es creciente en $(-\infty, 0{,}42)$, decreciente en $(0{,}42, 1{,}58)$ y vuelve a ser creciente en $(1{,}58, +\infty)$. Para poder representar el máximo y el mínimo en el plano, es necesario calcular sus imágenes: $f(0{,}42) = 0{,}385$ y $f(1{,}58) = -0{,}385$.

Como los puntos de inflexión de f son las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$, sabemos que dicho punto es $x = 1$, puesto que $f''(x) = 6x-6$. Como $f''(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 1)$, tenemos que f es cóncava hacia abajo en ese intervalo. Por otro lado, como $f''(x) > 0, \forall x \in (1, \infty)$, tenemos que f es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 1.

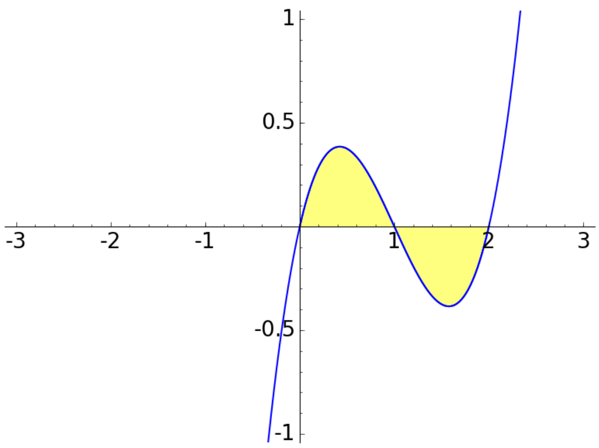

Figura 1: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$ es igual a:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| + \left|\int_1^2 f(x)dx\right| = |F(1)-F(0)| + |F(2)-F(1)| = |\frac{5}{4}-1| + |1-\frac{5}{4}| = \frac{1}{2}.$$

3. El 30 % de los estudiantes de un instituto practica fútbol. De entre los que practican fútbol, el 40 % practica además baloncesto. De entre los que no practican fútbol, un cuarto practica baloncesto. Elegido un estudiante de ese instituto al azar,

a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes?

b) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que practique el baloncesto?

Solución: Si denotamos por F el suceso «practica fútbol» y por B el suceso «practica baloncesto», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(F) = 0{,}3$$
$$P(B/F) = 0{,}4$$
$$P(B/\overline{F}) = 0{,}25$$

a) $P(F \cap B) = P(B/F)P(F) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12.$

b) $P(B) = P(F \cap B) + P(\overline{F} \cap B) = 0{,}12 + P(B/\overline{F})P(\overline{F}) = 0{,}12 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}295.$

---

4. En una piscifactoría se desea estimar el porcentaje de peces pequeños. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 700 peces y se encuentra que exactamente 70 de ellos son pequeños.

a) **[1 punto]** Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de peces pequeños en la piscifactoría.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? Considerando dicha muestra, ¿qué le ocurriría al error de estimación si aumentase el nivel de confianza?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución: Si representamos por p la proporción poblacional de peces pequeños y por $\hat{p}$ la proporción de peces pequeños de los $n = 700$ en la muestra, se tiene que p es desconocido y $\hat{p} = 70/700 = 0{,}1$.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de peces pequeños, al 99 % de confianza es:

$$\left(0{,}1 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{700}}, 0{,}1 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{700}}\right) = (0{,}071, 0{,}129),$$

teniendo en cuenta que $\hat{p} = 0{,}1$, $n = 700$ y el valor $z_{\alpha/2} = 2{,}58$ puesto que debe cumplir que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}99$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}995$.

Así pues, tenemos una confianza del 99 % de que el verdadero porcentaje de peces pequeños está entre el 7,1 % y el 12,9 %.

b) En el intervalo anterior el error de estimación es

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{700}} = 0{,}029$$

Con la misma muestra, si el nivel de confianza aumentase, el valor de $z_{\alpha/2}$ también aumentaría y, por tanto, el error de estimación sería más grande, así como la amplitud del intervalo.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios son resueltos utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica dos productos A y B con tres ingredientes distintos $I1$, $I2$ e $I3$. Para fabricar el producto A necesita 3 unidades del ingrediente $I1$ y 1 unidad del ingrediente $I2$. Para fabricar el producto B necesita 2 unidades del ingrediente $I1$ y otras 2 del ingrediente $I3$. Un día concreto, tiene en el almacén 18 unidades del ingrediente $I1$, 4 del $I2$ y 12 del $I3$. Se sabe además que el beneficio obtenido con cada producto A es de 30 euros y con cada producto B es de 50 euros.

a) **[2 puntos]** ¿Cuántos productos de tipo A y cuántos de tipo B puede fabricar ese día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 2 productos de cada tipo en ese día?

b) **[1 punto]** ¿Cuántos debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿y para maximizar el número total de productos fabricados?

Solución:

a) Si representamos por x e y el número de productos A y B, respectivamente, que fabrica ese día, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y & \leq & 18 \\ x & \leq & 4 \\ y & \leq & 6 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto representado en azul en la figura 2. Los extremos de dicho recinto son $A=(0,0)$, $B=(4,0)$, $C=(4,3)$, $D=(2,6)$ y $E=(0,6)$.

Sí, se podrían fabricar 2 productos de cada tipo ese día, puesto que el punto $(2,2)$ pertenece a la región factible, como puede verse en la figura 2.

b) El beneficio es $z(x,y)=30x+50y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$\begin{array}{l} z(A)=0 \text{ euros} \\ z(B)=120 \text{ euros} \\ z(C)=270 \text{ euros} \\ z(D)=360 \text{ euros} \\ z(E)=300 \text{ euros} \end{array}$$

por lo que el beneficio máximo se alcanza si se fabrican 2 productos de tipo A y 6 de tipo B.

Si lo que se quiere es maximizar el número total de productos fabricados, ahora $z(x,y)=x+y$, con lo que $z(A)=0$, $z(B)=4$, $z(C)=7$, $z(D)=8$ y $z(E)=6$, con lo que de nuevo el máximo se obtiene si se fabrican 2 productos de tipo A y 6 de tipo B.

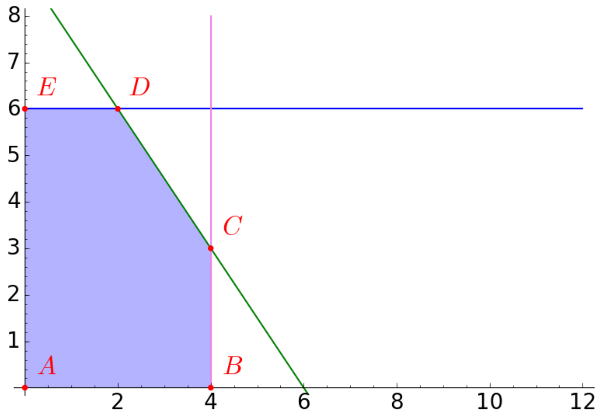

Figura 2: Región factible.

---

2. La temperatura de un laboratorio se puede relacionar con el tiempo desde que comienza la jornada laboral mediante la siguiente expresión ($f(x)$ representa la temperatura, en grados centígrados, y x es el tiempo transcurrido, en minutos, desde que comienza la jornada laboral):

$$f(x) = 20 - \frac{5}{4x+5}, \qquad x \geq 0.$$

a) **[2.5 puntos]** ¿Disminuye en algún momento la temperatura? Estudia y representa gráficamente la función f.

b) **[0.5 puntos]** El sistema de aire acondicionado comenzará a funcionar si la temperatura sube de los 21 grados. ¿Se encenderá el sistema de aire acondicionado en algún instante de tiempo?

Solución:

a) f es una función que está definida en todo el intervalo $[0,\infty)$, puesto que $4x+5>0$ para todo $x \geq 0$.

Si derivamos esta función se obtiene:

$$f'(x) = \frac{20}{(4x+5)^2} > 0, \forall x \in [0,\infty)$$

con lo que f nunca decrece y, por tanto, la temperatura no disminuye.

En cuanto a los puntos de corte:

- $f(0) = 19$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow 80x + 95 = 0$, pero esa igualdad no se da para ningún valor positivo de x (la solución es $x = -95/80$), con lo que $f(x) \neq 0, \forall x \in [0,\infty)$, es decir, la función no corta el eje de abscisas en ningún punto de su dominio.

f es continua en todo su dominio, puesto que es un cociente de polinomios, cuyo denominado no se anula en ningún punto del dominio.

Respecto a la monotonía, ya vimos que f siempre crece.

En cuanto a la derivada segunda, $f''(x) = -\frac{160}{(4x+5)^3} < 0$ para todo x positivo, con lo que f es cóncava hacia abajo.

Por último,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 20$$

con lo que la función tiene una asíntota horizontal en $y = 20$.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 3.

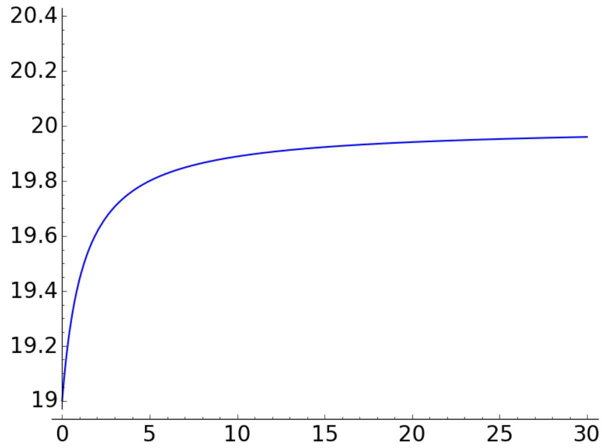

Figura 3: Representación gráfica de f.

b) Como la función es creciente y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 20$, se tiene que el valor 21 no se alcanza nunca y, por tanto, el sistema de aire acondicionado no se encenderá.

---

3. En una empresa, el 30 % de los empleados son mujeres y el 70 % restante son hombres. De las mujeres, el 80 % pasa un determinado test, mientras que del grupo de los hombres, solo el 70 % pasa dicho test.

a) **[1 punto]** Obtener el porcentaje de personas de dicha empresa que pasa el test.

b) **[1 punto]** Si una persona pasa el test, obtener la probabilidad de que sea mujer.

Solución: Si denotamos por T el suceso «pasar el test» y por M el suceso «ser mujer», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(M) = 0{,}3$$
$$P(T/M) = 0{,}8$$
$$P(T/\overline{M}) = 0{,}7$$

a) Puesto que $P(T) = P(T\cap M) + P(T\cap \overline{M}) = P(T/M)P(M) + P(T/\overline{M})P(\overline{M}) = 0{,}8(0{,}3) + 0{,}7(0{,}7) = 0{,}73$, con lo que el porcentaje de personas de dicha empresa que pasa el test es del 73 %.

b) La probabilidad pedida es

$$P(M/T) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}8(0{,}3)}{0{,}73} = 24/73 \approx 0{,}33.$$

4. Un consumidor está convencido de que el peso escurrido medio de un producto es menor que el que indican las latas. Para estudiar este hecho, el consumidor toma una muestra aleatoria simple de 100 latas en las que se ha observado un peso escurrido medio de 245 g. Se supone además que el peso escurrido por lata sigue una distribución normal con desviación típica 9 g.

a) **[1 punto]** Construir un intervalo de confianza para el peso medio escurrido de las latas de ese producto, al 90 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio escurrido a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 2 g y un nivel de confianza del 90 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución: Si denotamos por X la v.a. «peso escurrido», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 9$, es decir, $X \longrightarrow N(\mu, 9)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ para la cual se obtiene una media muestral $\bar{x} = 245$.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $\bar{x}$ representa la media muestral, n el tamaño de muestra, σ la desviación típica poblacional y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para el peso escurrido medio, al 90 % de confianza es:

$$\left(245 - 1{,}64\frac{9}{\sqrt{100}}, 245 + 1{,}64\frac{9}{\sqrt{100}}\right) = (243{,}52; 246{,}48),$$

puesto que el valor $z_{\alpha/2}$ debe verificar que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}9$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

Por lo tanto, tenemos una confianza del 90 % de que el peso escurrido medio de esas latas está entre 243,52 y 246,48 gramos.

b) Una vez fijados el error máximo de estimación ε y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Así pues, puesto que $\varepsilon \leq 2$ y $1-\alpha = 0{,}9$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$, se tiene que

$$n \geq \left(1{,}64\frac{9}{2}\right)^2 = 54{,}46,$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 55 latas.