Universidad Zaragoza
1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2017
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones **propuestas, A o B**. **En cada pregunta se señala la puntuación máxima.**

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN

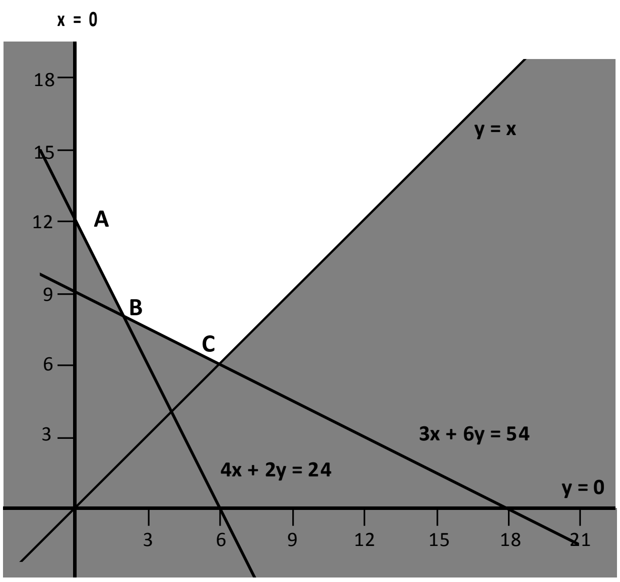
Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

TIPO DE FURGONETAS	NÚMERO	PERROS	GATOS	COSTE
A	x	4x	3x	240x
B	y	2y	6y	400y
Condiciones:	$x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \geq x$	$4x+2y \geq 24$	$3x+6y \geq 54$	$F(x,y)=240x+400y$

Por lo tanto, la función objetivo es $F(x,y)=240x+400y$ (coste del alquiler de las furgonetas) que debe ser mínima.

Las restricciones a las que debe estar sometida la solución son: $\{ x \geq 0 , y \geq 0 , y \geq x , 4x+2y \geq 24 , 3x+6y \geq 54 \}$

Obtengamos, gráficamente, la región factible (solución del conjunto de restricciones):



- La recta $x=0$ es el eje de ordenadas y la inecuación $x \geq 0$ tiene por solución el semiplano de su derecha (en blanco)

- La recta $y=0$ es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior (en blanco).

- La recta $y=x$ es la bisectriz del primer cuadrante. La solución de la inecuación $y \geq x$ es el semiplano superior (en blanco).

- La recta $4x+2y=24$ pasa por los puntos $(6,0)$ y $(0,12)$. La solución de la inecuación $4x+2y \geq 24$ es el semiplano de su derecha (en blanco).

- La recta $3x+6y=54$ pasa por $(18,0)$ y $(0,9)$. La inecuación $3x+6y \geq 54$ tiene por solución el semiplano de su parte superior (en blanco).

La región factible (en blanco) es una región abierta de vértices A, B y C. La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo en ellos:

Vértice A: $A(0,12) \Rightarrow F(0,12) = 400\cdot 12 = 4800$ €

Vértice B: $\begin{cases} 4x+2y=24 \\ 3x+6y=54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=12 \\ x+2y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=24 \\ -x-2y=-18 \end{cases} \Leftrightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2 \ , \ y=8 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(2,8) \Rightarrow F(2,8) = 240\cdot 2 + 400\cdot 8 = 3680$ €

Vértice C: $\begin{cases} y=x \\ 3x+6y=54 \end{cases} \Leftrightarrow 9x=54 \Rightarrow x=6 \ , \ y=6 \Rightarrow C(6,6) \Rightarrow F(6,6) = 240\cdot 6 + 400\cdot 6 = 3840$ €

Por lo tanto, el coste mínimo, de 3680 €, se obtiene al alquilar 2 furgonetas del tipo A y 8 furgonetas del tipo B.

2. *(3,25 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tal que f tenga un máximo relativo en $x = -1$ con valor $f(-1) = 2$.

b) *(1,25 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx$$

SOLUCIÓN

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2$

- Si en $x=-1$ la función tiene un máximo relativo: $f'(-1)=0 \Rightarrow 3a-2b+2=0 \Rightarrow 3a-2b=-2$ (*)

- $f(-1)=2 \Rightarrow -a+b-2+2=2 \Rightarrow -a+b=2$ (*)

De las igualdades (*): $\begin{cases} 3a-2b=-2 \\ -2a+2b=4 \end{cases} \Rightarrow a=2 \ , \ b=4 \Rightarrow f(x) = 2x^3+4x^2+2x+2$

b) Obtengamos una primitiva de la función dada:

$$\int \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{7}{3}\int e^{3x}\cdot 3\cdot dx + \frac{4}{3}\int x^2\,dx - 3\int x^{1/2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{7}{3}e^{3x} + \frac{4}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - 3\cdot\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \ln x$$

Tenemos:

$$\int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{7}{3}e^{3x} + \frac{4}{9}x^3 - 2\cdot\sqrt{x^3} + \ln x\right]_1^2 = \left(\frac{7}{3}e^6 + \frac{32}{9} - 4\cdot\sqrt{2} + \ln 2\right) - \left(\frac{7}{3}e^3 + \frac{4}{9} - 2 + 0\right) =$$

$$= \frac{7}{3}e^3\left(e^3-1\right) + \frac{46}{9} - 4\sqrt{2} + \ln 2 \simeq 894{,}615$$

3. *(3,5 puntos)* En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:

a) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que las dos sean rojas.

b) *(1 punto)* La probabilidad de que sean de distinto color.

c) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

d) *(1 punto)* Sea *A* el suceso "la primera bola extraída es roja" y *B* el suceso "las dos bolas son del mismo color", ¿son los dos sucesos *A* y *B* independientes?

SOLUCIÓN

Sean B_1, N_1 y R_1 los sucesos "la primera bola extraída es blanca, negra o roja, respectivamente" y B_2, N_2 y R_2 los sucesos "la segunda bola extraída es blanca, negra o roja, respectivamente".

a) $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2 / R_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{11}$

b) El suceso P = "las dos bolas extraídas son de distinto color" es el suceso contrario de "las dos bolas extraídas son del mismo color"

$$p(P) = 1 - p(\overline{P}) = 1 - \left[p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap N_2) + p(R_1 \cap R_2)\right] = 1 - \left(\frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}\right) = 1 - \frac{34}{110} = \frac{76}{110} = \frac{38}{55}$$

c) $p(R_2) = p(B_1 \cap R_2) + p(N_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{50}{110} = \frac{5}{11}$

d) Los sucesos A y B son independientes si $p(B / A) = p(B)$

$$\left.\begin{array}{l} p(B / A) = p(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{11} \\ p(B) = p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap N_2) + p(R_1 \cap R_2) = \frac{34}{110} = \frac{17}{55} \end{array}\right| \Rightarrow p(B / A) \neq p(B) \Rightarrow \text{los sucesos no son independientes}$$

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)* Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

SOLUCIÓN

Sea "x" la inversión en el fondo A, "y" la inversión en B y "z" la inversión en C. Se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 10000 \\ 0{,}05x + 0{,}1y + 0{,}02z = 497 \\ x = 3(y + z) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 10000 \\ 5x + 10y + 2z = 49700 \\ x - 3y - 3z = 0 \end{array}\right.$$

Utilicemos el método de Gauss para resolver el sistema. Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 5 & 10 & 2 & 49700 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 - 5F_1 \\ F_3 - F_1}}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 0 & 5 & -3 & -300 \\ 0 & -4 & -4 & -10000 \end{array}\right) \overset{5F_3 + 4F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10000 \\ 0 & 5 & -3 & -300 \\ 0 & 0 & -32 & -51200 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$-32z = -51200 \Rightarrow z = \frac{51200}{32} = 1600 \quad ; \quad 5y = -300 + 3 \cdot 1600 \Rightarrow y = \frac{4500}{5} = 900 \quad ; \quad x = 10000 - 1600 - 900 = 7500$$

Luego invirtió 7500 € en el fondo A, 900 € en el fondo B y 1600 € en el fondo C.

2. *(3,25 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$$

calcular:

a) *(0,25 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

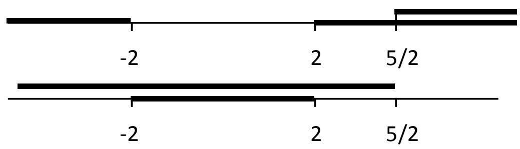
d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN

a) f(x) es una función racional. Su dominio son todos los números reales excepto los que anulen el denominador:

$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

b) $\dfrac{x^2-4}{2x-5}>0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2-4>0 & \Rightarrow\; x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty) \\ 2x-5>0 & \Rightarrow\; x>5/2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-4<0 & \Rightarrow\; x\in(-2,2) \\ 2x-5<0 & \Rightarrow\; x<5/2 \end{cases} \end{cases}$



luego la función es positiva $\forall x\in(-2,2)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

c) ▪ Asíntotas verticales: $x=\dfrac{5}{2}$ pues $\lim\limits_{x\to 5/2}\dfrac{x^2-4}{2x-5}=\infty$

Posición relativa de la curva respecto a la asíntota: $\lim\limits_{x\to 5/2^-}\dfrac{x^2-4}{2x-5}=\dfrac{+}{-}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 5/2^+}\dfrac{x^2-4}{2x-5}=\dfrac{+}{+}=+\infty$

▪ Asíntotas horizontales: no tiene, pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{2x-5}=\infty$

▪ Asíntotas oblicuas $y=mx+n$: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2-4}{2x-5}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{2x^2-5x}=\dfrac{1}{2}$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-4}{2x-5}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-8-2x^2+5x}{4x-10}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-8}{4x-10}=\frac{5}{4}$$

Luego $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$ es una asíntota oblicua de la función.

d) $f'(x)=\dfrac{2x(2x-5)-(x^2-4)2}{(2x-5)^2}=\dfrac{4x^2-10x-2x^2+8}{(2x-5)^2}=\dfrac{2x^2-10x+8}{(2x-5)^2}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2-10x+8=0 \Rightarrow x=\dfrac{10\pm\sqrt{100-64}}{4}=\dfrac{10\pm 6}{4}= \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$ (puntos críticos)

$f''(x)=\dfrac{(4x-10)(2x-5)^2-(2x^2-10x+8)2(2x-5)2}{(2x-5)^4} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f''(1)=\dfrac{(-\cdot+)-0}{+}=\dfrac{-}{+}<0 \;\Rightarrow\; x=1 \text{ máximo relativo} \\ f''(4)=\dfrac{(+\cdot+)-0}{+}=\dfrac{+}{+}>0 \;\Rightarrow\; x=4 \text{ mínimo relativo} \end{array} \right.$

La función tiene un máximo relativo en $(1,1)$ y un mínimo relativo en $(4,4)$.

3. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Se sabe que la cantidad de hidratos de carbono de las barritas energéticas de una marca es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 gramos. Elegimos una muestra aleatoria simple de 75 barritas, les medimos la cantidad de hidratos de carbono y calculamos su promedio, que resulta ser igual a 23,8 gramos. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la cantidad de hidratos de carbono en las barritas de esa marca.

b) *(1,5 puntos)* Un opositor se sabe 28 de los 40 temas de un examen. En el examen se eligen al azar 2 de los 40 temas. ¿Cuál es la probabilidad de que el opositor se sepa los dos temas? ¿Cuál es la probabilidad de que se sepa al menos uno de los dos temas?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879

0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

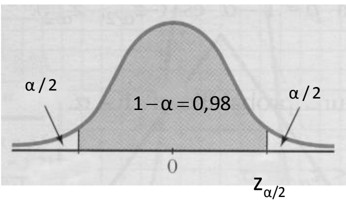
NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

a) Puesto que la población de referencia es normal, el intervalo de confianza para la media de la población, μ, es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

En nuestro caso, la media muestral es $\overline{x} = 23{,}8$ gramos, la desviación típica de la población es $\sigma = 1{,}5$ gramos y el tamaño de la muestra es de 75 barritas energéticas.



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 98%:

$$1-\alpha = 0{,}98 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0{,}98 = 0{,}02 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}02}{2} = 0{,}01 \;\Rightarrow\; 1-0{,}01 = 0{,}99$$

Buscamos en la tabla el valor 0,99 y el más próximo (0,9901) se corresponde con un valor crítico de 2,33.

El intervalo de confianza para la media de la población es entonces:

$$\left(23{,}8 - 2{,}33 \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{75}} \;,\; 23{,}8 + 2{,}33 \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{75}} \right) = \left(23{,}4 \;,\; 24{,}2 \right)$$

b) ▪ Sea A_1 el suceso "el opositor se sabe el primer tema elegido" y A_2 el suceso "el opositor se sabe el segundo tema elegido". Se tiene:

$$p\left(A_1 \cap A_2\right) = p\left(A_1\right) \cdot p\left(A_2 / A_1\right) = \frac{28}{40} \cdot \frac{27}{39} = \frac{756}{1560} = 0{,}4846$$

▪ El suceso "se sabe al menos uno de los dos temas" es el suceso contrario al suceso "no se sabe ninguno de los dos temas". Tenemos:

$$p\left(\text{"se sabe al menos uno de los temas"}\right) = 1 - p\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) = 1 - p\left(\overline{A_1}\right) \cdot p\left(\overline{A_2} / \overline{A_1}\right) = 1 - \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = 1 - \frac{132}{1560} =$$

$$= 1 - 0{,}0846 = 0{,}9154$$