

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) (0,5 puntos) ¿Se puede calcular AB ? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b) (0,5 puntos) ¿Se puede calcular BA ? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

c) (1,25 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de C .

d) (1 punto) Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2C + 4X = 3D$.

SOLUCIÓN.

a) Sí se puede pues el número de columnas de A coincide con el de filas de B .

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 14 \\ 0 & 14 & -7 \end{pmatrix}$$

b) No, porque el número de columnas de B (3) no coincide con el número de filas de A (2).

$$\begin{aligned} c) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 5F_1}} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2: 5} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + 3F_2} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 19/5 & 3/5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3: \frac{5}{3}} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 19/3 & 1 & 5/3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2: \frac{1}{5}F_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 19/3 & 1 & 5/3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 + F_2} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 19/3 & 1 & 5/3 \end{array} \right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & -1/3 \\ -5/3 & 0 & -1/3 \\ 19/3 & 1 & 5/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad 2C + 4X = 3D & \Rightarrow X = \frac{1}{4}(3D - 2C) \Rightarrow X = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ -10 & 4 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 2 & 3 & -2 \\ 13 & -7 & 6 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 3 \\ 1/2 & 3/4 & -1/2 \\ 13/4 & -7/4 & 3/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. (3,25 puntos) Los ingresos por ventas (en millones de euros) que obtiene una empresa dependen del gasto que haga en publicidad, de forma que, si gasta x millones de euros, los ingresos por ventas son iguales a:

$$V(x) = \frac{21x + 12}{x + 1}$$

a) (0,75 puntos) Encontrar, si existe, el valor o valores de x para los cuales los ingresos por ventas son iguales a 18 millones de euros.

b) (1 punto) Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x)$$

¿Cómo se puede interpretar el resultado?

c) (1,5 puntos) Si definimos el beneficio por ventas como la diferencia entre los ingresos por ventas y el gasto en publicidad (esto es, $B(x) = V(x) - x$), calcular el máximo beneficio que se puede alcanzar cuando $x \in [0, 5]$.

SOLUCIÓN.

a) $\frac{21x+12}{x+1} = 18 \Rightarrow 21x+12 = 18x+18 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$ es decir, con un gasto de 2 millones en publicidad, el ingreso por ventas es de 18 millones de euros.

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{21x+12}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{21x}{x} + \frac{12}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{21 + \frac{12}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{21+0}{1+0} = 21$$

La interpretación es que por mucho que aumente el gasto en publicidad, los ingresos por ventas no sobrepasarán los 21 millones de euros.

$$c) B(x) = V(x) - x = \frac{21x+12}{x+1} - x = \frac{21x+12-x^2-x}{x+1} = \frac{-x^2+20x+12}{x+1}$$

Veamos si en el intervalo $[0, 5]$ la función alcanza algún máximo relativo:

$$B'(x) = \frac{(-2x+20)(x+1) - (-x^2+20x+12)}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+20x+20+x^2-20x-12}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x+8}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2-2x+8=0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{-2} = \frac{2 \pm 6}{-2} = \begin{cases} x = -4 \notin [0, 5] \\ x = 2 \end{cases}$$

Estudiemos si en $x = 2$ la función alcanza un máximo relativo:

$$B''(x) = \frac{(-2x-2)(x+1)^2 - (-x^2-2x+8)2(x+1)}{(x+1)^4} \Rightarrow B''(2) = \frac{(-6-2)-0}{+} < 0 \Rightarrow \text{En } x=2 \text{ la función tiene un máximo}$$

relativo.

Veamos en qué valor de $x \in [0, 5]$ la función alcanza su máximo absoluto (en el máximo relativo o en los extremos del intervalo):

$$B(0) = 12, \quad B(5) = \frac{-25+100+12}{6} = 14,5, \quad B(2) = \frac{-4+40+12}{3} = 16$$

luego el máximo beneficio en el intervalo $[0, 5]$ es de 16 millones de euros obtenidos al gastar 2 millones de euros en publicidad.

3. (3,5 puntos) En la Facultad de Economía de una universidad se pueden estudiar 3 grados: Grado en Contabilidad, Grado en Economía y Grado en Empresariales. En todos los grados hay un grupo de mañana y un grupo de tarde. La distribución de los estudiantes en cada uno de los grados, según grupo de mañana y de tarde es:

	Grado en Contabilidad	Grado en Economía	Grado en Empresariales
Mañana	395	278	538
Tarde	240	306	486

a) (0,5 puntos) Se elige al azar un estudiante de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo de tarde del Grado en Contabilidad?

b) (0,75 puntos) Se elige al azar un estudiante del grupo de tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del Grado en Contabilidad?

- c) (0,75 puntos) Se elige al azar un estudiante de la Facultad. Sea A el suceso "Es del Grado en Contabilidad" y B el suceso "Es del grupo de tarde", ¿son independientes los sucesos A y B?
- d) (0,75 puntos) Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean del grupo de tarde?
- e) (0,75 puntos) Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo Grado?

SOLUCIÓN.

La tabla de contingencia correspondiente a la distribución de los estudiantes es:

	CONTABILIDAD (C)	ECONOMÍA (EC)	EMPRESARIALES (EM)	TOTAL
MAÑANA (M)	395	278	538	1211
TARDE (T)	240	306	486	1032
TOTAL	635	584	1024	2243

$$a) p(T \cap C) = \frac{240}{2243} \approx 0,107$$

$$b) p(C/T) = \frac{240}{1032} = 0,2326$$

c) El suceso A del enunciado es el que hemos nombrado C (de Contabilidad) y el suceso B del enunciado es el que hemos nombrado T (de Tarde). Si A y B (C y T) son independientes: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Se tiene:

$$p(A) = p(C) = \frac{635}{2243} \approx 0,2832 \quad p(B) = p(T) = \frac{1032}{2243} \approx 0,4601 \quad p(A \cap B) = p(C \cap T) = \frac{240}{2243} \approx 0,107 \quad (\text{apartado a)})$$

y como $\frac{635}{2243} \cdot \frac{1032}{2243} = \frac{655320}{5031049} \approx 0,1303 \neq \frac{240}{2243} \approx 0,107 \Rightarrow$ los sucesos no son independientes.

$$d) p(T_1 \cap T_2) = p(T_1) \cdot p(T_2 / T_1) = \frac{1032}{2243} \cdot \frac{1031}{2242} = \frac{1063992}{5028806} \approx 0,2116$$

$$e) p[(C_1 \cap C_2) \cup (EC_1 \cap EC_2) \cup (EM_1 \cap EM_2)] = p(C_1 \cap C_2) + p(EC_1 \cap EC_2) + p(EM_1 \cap EM_2) =$$

$$= \frac{635}{2243} \cdot \frac{634}{2242} + \frac{584}{2243} \cdot \frac{583}{2242} + \frac{1024}{2243} \cdot \frac{1023}{2242} = \frac{1790614}{5028806} \approx 0,3561$$

OPCIÓN B

1. (3,25 puntos) Una asociación está organizando un viaje a un parque temático para sus socios. Para comprar las entradas, la asociación ha llegado a un acuerdo con la dirección del parque, de forma que puede comprar dos tipos de entradas, "Grupal-A" y "Grupal-B" con las siguientes características:

- Cada entrada de tipo "Grupal-A" permite entrar al parque a 2 adultos y 3 niños, y cuesta 85 euros.
- Cada entrada de tipo "Grupal-B" permite entrar al parque a 4 adultos y 12 niños, y cuesta 230 euros.
- Deben comprarse, al menos, 4 entradas de tipo "Grupal-A" y 2 entradas de tipo "Grupal-B".

La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas entradas de cada tipo "Grupal-A" y "Grupal-B" debe comprar para minimizar el coste total. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de Programación Lineal.

Organicemos los datos en una tabla:

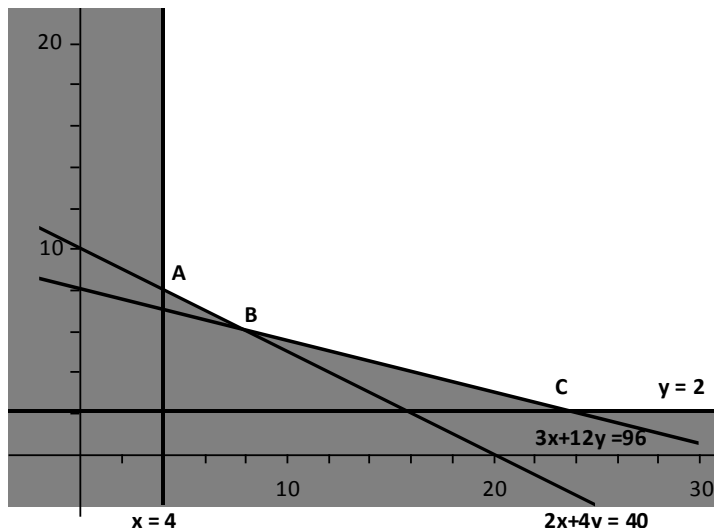
TIPOS DE ENTRADA	NÚMERO	ADULTOS	NIÑOS	COSTE
GRUPAL-A	x	$2x$	$3x$	$85x$
GRUPAL-B	y	$4y$	$12y$	$230y$
	$x \geq 4, y \geq 2$	$2x + 4y \geq 40$	$3x + 12y \geq 96$	$F(x,y) = 85x + 230y$

Así pues, el problema queda planteado en los siguientes términos:

La función objetivo es $F(x,y) = 85x + 230y$ que debe minimizarse.

Las restricciones a las que debe someterse la solución son: $x \geq 4, y \geq 2, 2x + 4y \geq 40, 3x + 12y \geq 96$

Dibujemos en el plano el conjunto de restricciones para localizar la región factible:



▪ La recta $x=4$ es paralela al eje OY a una distancia de 4 unidades. La solución de la inecuación $x \geq 4$ es el semiplano que está a la derecha de la recta (en blanco)

▪ La recta $y=2$ es paralela al eje OX a una distancia de 2 unidades. La solución de la inecuación $y \geq 2$ es el semiplano que está por encima de la recta (en blanco).

▪ La recta $2x + 4y = 40 \Leftrightarrow x + 2y = 20$ pasa por los puntos $(20, 0)$ y $(0, 10)$. La solución de la inecuación $2x + 4y \geq 40$ es el semiplano que no contiene al origen de coordenadas.

▪ La recta $3x + 12y = 96 \Leftrightarrow x + 4y = 32$ pasa por los puntos $(8, 6)$ y $(0, 8)$. La solución de la inecuación $3x + 12y \geq 96$ es el semiplano que no contiene al origen de coordenadas (en blanco).

La región factible es una región abierta (en blanco) cuyos vértices son los puntos A, B y C. La función objetivo se minimizará en alguno de ellos. Calculemos sus coordenadas y el valor que tiene la función objetivo en cada uno:

Vértice A: $\begin{cases} x = 4 \\ x + 2y = 20 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 8 \Rightarrow A(4, 8) \Rightarrow F(4, 8) = 85 \cdot 4 + 230 \cdot 8 = 2180$

Vértice B: $\begin{cases} x + 2y = 20 \\ x + 4y = 32 \end{cases} \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6, x = 8 \Rightarrow B(8, 6) \Rightarrow F(8, 6) = 85 \cdot 8 + 230 \cdot 6 = 2060$

Vértice C: $\begin{cases} x + 4y = 32 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2, x = 24 \Rightarrow C(24, 2) \Rightarrow F(24, 2) = 85 \cdot 24 + 230 \cdot 2 = 2500$

Por consiguiente, la función objetivo es mínima para $x=8$ y $y=6$. Es decir, el coste mínimo, de 2060 €, se consigue comprando 8 entradas del tipo Grupal-A y 6 entradas del tipo Grupal-B.

2. (3,25 puntos) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ 18 - 4x + x^2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ x^3 - 9x^2 + 15x + 20 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Calcular a sabiendo que f es continua en $x = -1$.

b) (1,5 puntos) Calcular el máximo valor que toma la función f para $x \in [4, 8]$.

c) (1 punto) Calcular:

$$\int_1^2 f(x) dx$$

SOLUCIÓN.

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$ debe ser:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} (ax + 2) = \lim_{x \rightarrow -1} (18 - 4x + x^2) \Leftrightarrow -a + 2 = 18 + 4 + 1 \Rightarrow a = -21$$

b) En el intervalo $[4, 8]$, la función $f(x)$ está definida así: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 20$.

El máximo valor de la función en dicho intervalo lo alcanzará en los extremos del mismo o en algún máximo relativo, si lo tiene. Veamos, en primer lugar, si la función tiene algún máximo relativo dentro del intervalo:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 180}}{6} = \frac{18 \pm 12}{6} = \begin{matrix} 1 \in [4, 8] \\ 5 \end{matrix}$$

De los dos puntos críticos obtenidos sólo pertenece al intervalo el de abscisa $x = 5$. Veamos si se trata de un máximo relativo: $f''(x) = 6x - 18 \Rightarrow f''(5) > 0 \Rightarrow$ En $x = 5$ la función tiene un mínimo relativo.

El máximo valor de la función en el intervalo $[4, 8]$ lo alcanzará en alguno de los extremos del intervalo:

$$f(4) = 64 - 144 + 60 + 20 = 0 ; f(8) = 512 - 576 + 120 + 20 = 76 \Rightarrow \text{el máximo valor es de 76 y lo toma en } x = 8$$

$$c) \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (18 - 4x + x^2) dx = \left[18x - \frac{4x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left(36 - 8 + \frac{8}{3} \right) - \left(18 - 2 + \frac{1}{3} \right) = 12 + \frac{7}{3} = \frac{43}{3}$$

3. (3,5 puntos)

a) (2,75 puntos) La duración de las bombillas de un fabricante es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 75 horas.

a1) (1,75 puntos) Queremos construir un intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante, de forma que el error no sea mayor de 15 horas. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

a2) (1 punto) Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 150, comprobamos la duración de cada bombilla y calculamos su promedio, que resulta ser 1053 horas. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante.

b) (0,75 puntos) Sean A y B sucesos tales que $P(A) = 0,6$, $P(B/A) = 0,9$ y $P(B) = 0,8$. Calcular $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ y $P(A/B)$.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN.

a) $\sigma = 75$ horas

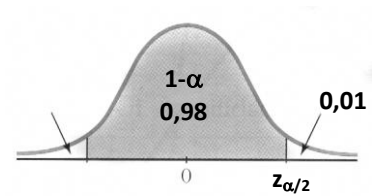
a1) Se tiene: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2$

En nuestro caso: $E = 15$ horas

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 98%:

$$1 - \alpha = 0,98 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,01 = 0,99$$

Buscamos en la tabla el valor más aproximado a 0,99 (0,9901) que se corresponde con un valor crítico $z_{\alpha/2} = 2,33$.



Se tiene entonces: $n = \left(\frac{2,33 \cdot 75}{15} \right)^2 = 135,7 \Rightarrow$ Debe tomarse una muestra de 136 bombillas

a2) Ahora, con $n = 150$ bombillas, $\bar{X} = 1053$ horas y $1 - \alpha = 0,98$, el intervalo de confianza para la media de la población, centrado en la media muestral, tiene como radio el error máximo admisible:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,33 \cdot \frac{75}{\sqrt{150}} = 14,27 \Rightarrow (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (1038,73, 1067,27)$$

b) Se tiene: $p(A) = 0,6$, $p(B/A) = 0,9$, $p(B) = 0,8$.

- $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = 0,6 \cdot 0,9 = 0,54$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,54 = 0,86$
- $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,54}{0,8} = 0,675$