Universidad Zaragoza
1542

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2015

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de A.

b) *(1,25 puntos)* Encontrar una matriz X, si existe, tal que $2X + B^2 = 3A$.

c) *(1 punto)* Sea $C = A + B$. Calcular el rango de C.

SOLUCIÓN.

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1:2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2+2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{F_2:5}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_1-2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/10 & -3/10 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -3/10 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/10 & -3/10 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

b) $2X + B^2 = 3A \Rightarrow X = \dfrac{1}{2}\left(3A - B^2\right)$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A - B^2 = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 16 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $$C = A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_2 \cdot 3}{\sim} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \overset{F_2+F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} C = 2$$

2. *(3,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{bx+3}{1-x} & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ x+3 & \text{si } x \in (0,3] \\ \dfrac{ax+3}{x^2+1} & \text{si } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Calcular a para que la función sea continua en $x = 3$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular b para que la función sea derivable en $x = 0$.

c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{x} + e^{5x} + 8x\right) dx$$

SOLUCIÓN.

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x=3$ debe ser:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to 3}\left(x+3\right)=\lim_{x\to 3}\frac{ax+3}{x^2+1} \;\Leftrightarrow\; 6=\frac{3a+3}{10} \;\Rightarrow\; 3a+3=60 \;\Rightarrow\; a=\frac{57}{3}=19$$

b) En el entorno de $x=0$, la función derivada es: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{b\left(1-x\right)+bx+3}{\left(1-x\right)^2} & \text{si } x\in\left(-\infty\,,0\right] \\ 1 & \text{si } x\in\left(0\,,3\right]\end{cases}$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=0$ debe ser: $f'\left(0^-\right)=f'\left(0^+\right) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{b+3}{1}=1 \;\Rightarrow\; b=-2$

c) Obtengamos una primitiva de la función: $\displaystyle\int\left(\frac{3}{x}+e^{5x}+8x\right)dx=3\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{5}\int e^{5x}\cdot 5\cdot dx+8\int x\,dx=3\ln x+\frac{e^{5x}}{5}+4x^2$

Por tanto: $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{3}{x}+e^{5x}+8x\right)dx=\left[3\ln x+\frac{e^{5x}}{5}+4x^2\right]_1^2=\left(3\ln 2+\frac{e^{10}}{5}+16\right)-\left(3\ln 1+\frac{e^{5}}{5}+4\right)=3\ln 2+\frac{e^{10}-e^{5}}{5}+12$

3. *(3 puntos)* Disponemos de los siguientes datos sobre el uso de nuevas tecnologías por parte de los estudiantes de una universidad: un 70% de los estudiantes de esa universidad tiene teléfono inteligente, un 50% de los estudiantes de esa universidad tiene ordenador portátil y un 40% de los estudiantes de esa universidad tiene ambos dispositivos (teléfono inteligente y ordenador portátil).

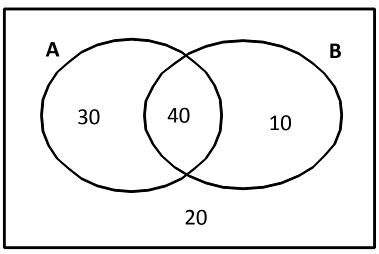
a) *(1 punto)* Si elegimos al azar un estudiante de esa universidad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga al menos uno de los dos dispositivos?

b) *(1 punto)* Si elegimos al azar un estudiante de entre los que tienen teléfono inteligente, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ordenador portátil?

c) *(1 punto)* Sea A el suceso "el estudiante tiene teléfono inteligente" y B el suceso "el estudiante tiene ordenador portátil", ¿son los sucesos A y B independientes?

SOLUCIÓN.

Sea A el suceso "el estudiante tiene teléfono inteligente" y B el suceso "el estudiante tiene ordenador portátil". Para un total de 100 estudiantes, la distribución es:



a) $p\left(A\cup B\right)=\dfrac{80}{100}=0{,}8$

▪ También: $p\left(A\cup B\right)=p\left(A\right)+p\left(B\right)-p\left(A\cap B\right)=0{,}7+0{,}5-0{,}4=0{,}8$

b) $p\left(B/A\right)=\dfrac{40}{70}=\dfrac{4}{7}=0{,}57$

▪ También: $p\left(B/A\right)=\dfrac{p\left(B\cap A\right)}{p\left(A\right)}=\dfrac{0{,}4}{0{,}7}=\dfrac{4}{7}=0{,}57$

c) $p\left(A\cap B\right)=\dfrac{40}{100}=0{,}4$; $p\left(A\right)=\dfrac{70}{100}=0{,}7$; $p\left(B\right)=\dfrac{50}{100}=0{,}5$

Como $p\left(A\cap B\right)\neq p\left(A\right)\cdot p\left(B\right) \;\Rightarrow$ los sucesos no son independientes.

▪ También: A y B son independientes si $p\left(B/A\right)=p\left(B\right)$.

Como $p\left(B/A\right)=0{,}57$ y $p\left(B\right)=0{,}5$, los sucesos no son independientes.

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Un agricultor tiene 40 hectáreas de terreno en las que puede plantar cebada o maíz (o no plantar nada). Cada hectárea de cebada necesitará 5 hectómetros cúbicos de agua mientras que cada hectárea de maíz necesitará 10 hectómetros cúbicos de agua. El agricultor podrá disponer de hasta 225 hectómetros cúbicos de agua. El beneficio que obtendrá por cada hectárea de cebada es de 100 euros mientras que por cada hectárea de maíz obtendrá un beneficio de 160 euros; además, las hectáreas en las que no plante nada las arrendará y obtendrá un beneficio de 50 euros por hectárea. La normativa no le permite plantar más hectáreas de maíz que de cebada. ¿Cuántas hectáreas de cebada y cuántas de maíz tiene que plantar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo?

SOLUCIÓN.

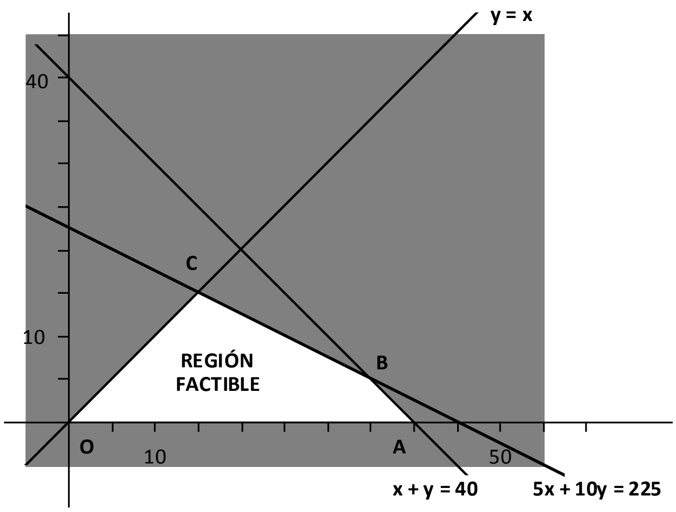
Se trata de un problema de Programación Lineal. Organicemos los datos en una tabla para facilitar su uso:

TIPO DE CULTIVO	Nº DE HECTÁREAS	HM^3 DE AGUA	BENEFICIO
Cebada	x	5x	100x
Maíz	y	10y	160y
	$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$ $x + y \leq 40$ $y \leq x$	$5x + 10y \leq 225 \quad \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \quad x + 2y \leq 45$	$100x + 160y + 50(40 - x - y) =$ $= 50x + 110y + 2000$

La función objetivo (beneficio que se obtiene) es: $F(x, y) = 50x + 110y + 2000$ donde *x* representa el número de hectáreas de cebada e *y* el de maíz plantadas.

Las restricciones a que debe estar sometida la solución son: $x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \quad , \quad x + y \leq 40 \quad , \quad y \leq x \quad , \quad x + 2y \leq 45$.

Obtengamos la región factible, conjunto de puntos del plano (x, y) que verifican las restricciones.



La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.

La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y la solución de $y \geq 0$ es el semiplano superior.

La recta $x + y = 40$ pasa por los puntos $(40, 0)$ y $(0, 40)$. La solución de la inecuación $x + y \leq 40$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La recta $y = x$ es la bisectriz del primer cuadrante. La inecuación $y \leq x$ tiene por solución el semiplano al que pertenece el punto $(10, 0)$.

La recta $5x + 10y = 225$ o $x + 2y = 45$ pasa por los puntos $(45, 0)$ y $(5, 20)$. La solución de la inecuación $x + 2y \leq 45$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

El conjunto de puntos del plano que verifican las restricciones es el cuadrilátero OABC (en blanco en la figura).

La función objetivo se optimiza en alguno o algunos de los vértices de la región factible. Obtengamos entonces las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo en los mismos para observar en cuál de ellos es máxima.

Vértice $O(0, 0) \quad \Rightarrow \quad F(0, 0) = 2000$.

Vértice $A(40, 0) \quad \Rightarrow \quad F(40, 0) = 4000$

Vértice B: $\begin{cases} x+y=40 \\ x+2y=45 \end{cases} \Rightarrow\ y=5\ ,\ x=35\ \Rightarrow\ B(35\,,5)\ \Rightarrow\ F(35\,,5)=4300$

Vértice C: $\begin{cases} y=x \\ x+2y=45 \end{cases} \Rightarrow\ x=y=15\ \Rightarrow\ C(15\,,15)\ \Rightarrow\ F(15\,,15)=4400$

La función objetivo se maximiza en el vértice C. Para obtener el máximo beneficio, que será de 4400 euros, deben sembrarse 15 ha de cebada, 15 ha de maíz y dejar 10 ha sin sembrar.

2. *(3,5 puntos)* Sea la función:

$$f(x)=\frac{2x+5}{x^2-4}$$

Calcular:

a) *(0,5 puntos)* Su dominio.

b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de x es $f(x)$ mayor que 0?

c) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

d) *(0,75 puntos)* Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional cuyo dominio está formado por todos los números reales excepto los que anulan el denominador. En este caso: $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-2\,,2\}$.

b) $\dfrac{2x+5}{x^2-4}>0\ \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x+5>0\ \Rightarrow\ x>-5/2\ \Rightarrow\ x\in(-5/2\,,+\infty) \\ x^2-4>0\ \Rightarrow\ x\in(-\infty\,,-2)\cup(2\,,+\infty) \end{cases} \Rightarrow\ x\in\left(-\frac{5}{2},-2\right)\cup(2\,,+\infty)$$

$$\begin{cases} 2x+5<0\ \Rightarrow\ x<-5/2\ \Rightarrow\ x\in(-\infty\,,-5/2) \\ x^2-4<0\ \Rightarrow\ x\in(-2\,,2) \end{cases} \Rightarrow\ \text{No hay soluciones comunes}$$

Por lo tanto, la función es positiva para $x\in\left(-\frac{5}{2},-2\right)\cup(2\,,+\infty)$.

c) $f'(x)=\dfrac{2(x^2-4)-(2x+5)2x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{2x^2-8-4x^2-10x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}=0\ \Rightarrow\ -2x^2-10x-8=0\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ x=\frac{10\pm\sqrt{100-64}}{-4}=\frac{10\pm 6}{-4}=\begin{cases}-4\\-1\end{cases}\quad \text{(valores críticos)}$$

$$f''(x)=\frac{(-4x-10)(x^2-4)^2-(-2x^2-10x-8)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4}$$

> NOTA: Se trata ahora de sustituir los valores críticos en f'' y observar el signo del valor que obtenemos. Para facilitar la tarea debe tenerse en cuenta que el denominador es siempre positivo y que en el numerador, el primer factor del segundo sumando es 0 y con él todo ese segundo sumando. Que el segundo factor del primer sumando es positivo. El signo de f'' depende entonces del signo que tenga el primer factor del primer sumando. En este caso: $-4x-10$.

$f''(-4)>0\ \Rightarrow$ En $x=-4$ la función tiene un mínimo relativo: $\left(-4\,,-\dfrac{1}{4}\right)$

$f''(-1)<0\ \Rightarrow$ En $x=-1$ la función tiene un máximo relativo: $(-1\,,-1)$

d) ▪ Asíntotas verticales: al tratarse de una función racional, las posibles asíntotas verticales están en los valores de x que anulan el denominador. En este caso: $x=-2$ y $x=2$.

$x=-2$ es asíntota vertical de la función porque $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{x^2-4}=\infty$.

$x=2$ es asíntota vertical de la función porque $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+5}{x^2-4}=\infty$.

▪ Asíntota horizontal: $y=0$ pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+4}{x^2-4}=0$

3. *(3 puntos)* La producción en kilos de los naranjos de una variedad es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 5 kilos.

a) *(1,5 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 96% para la media de la producción de los naranjos de esta variedad de forma que su amplitud no sea mayor que 3 kilos. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

b) *(1,5 puntos)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 10. Elegimos 10 naranjos de esta variedad y medimos su producción en kilos, con los siguientes resultados:

82, 90, 87, 75, 78, 83, 92, 77, 85, 86.

Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media de la producción de los naranjos de esta variedad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

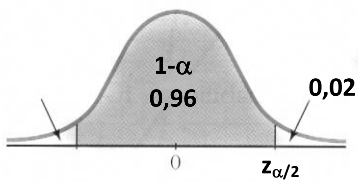
SOLUCIÓN.

a) Si la amplitud del intervalo de confianza debe ser menor o igual que 3 kilos, el radio del intervalo (error máximo admisible) es de 1,5 kilos.

Se tiene: $E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; n=\left(z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{E}\right)^2$

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 96%:

$1-\alpha=0{,}96 \;\Rightarrow\; \alpha=1-0{,}96=0{,}04 \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2}=0{,}02 \;\Rightarrow\; 1-\dfrac{\alpha}{2}=1-0{,}02=0{,}98$



Buscamos en la tabla el valor más aproximado a 0,98 y se corresponde con un valor crítico $z_{\alpha/2}=2{,}05$.

Se tiene entonces: $n=\left(\dfrac{2{,}05\cdot 5}{1{,}5}\right)^2=46{,}7 \;\Rightarrow\;$ Debe tomarse una muestra de 46 naranjos.

b) Calculemos la media de la muestra: $\overline{X}=\dfrac{82+90+87+75+78+83+92+77+85+86}{10}=\dfrac{835}{10}=83{,}5$ kilos

Aunque la muestra sea pequeña, como la población de partida es normal también lo es la distribución de las medias muestrales cualquiera que sea su tamaño.

El radio del intervalo de confianza es: $E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=2{,}05\cdot\dfrac{6}{\sqrt{10}}=3{,}24$

El intervalo de confianza para la media de la población es entonces: $\left(\overline{X}-E\ ,\ \overline{X}+E\right)=\left(80{,}26\ ,\ 86{,}74\right)$