Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,5 puntos)*

a) *(2,5 puntos)* Los tres profesores de matemáticas de un instituto, María, Ana y Carlos, tienen edades cuya suma es 120 años. La suma de las edades de María y Ana es el doble que la edad de Carlos. Además, dentro de 4 años, la suma de las edades que tengan Ana y Carlos será el triple de la edad que tenga María. Plantear y resolver un sistema lineal que permita conocer las edades de los tres profesores.

b) *(1 punto)* Encontrar, si existe, la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) Sea x la edad de María, y la de Ana, z la de Carlos.

$$\left\{\begin{aligned} x+y+z&=120 \\ x+y\quad&=2z \\ y+4+z+4&=3(x+4) \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x+y+z&=120 \\ x+y-2x&=0 \\ 3x-y-z&=-4 \end{aligned}\right.$$ Resolvamos el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right) \underset{F_3-3F_1}{\overset{F_2-F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & -3 & -120 \\ 0 & -4 & -4 & -364 \end{array}\right) \overset{F_2\leftrightarrow F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & -4 & -4 & -364 \\ 0 & 0 & -3 & -120 \end{array}\right) \underset{F_3:(-3)}{\overset{F_2:(-4)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 1 & 91 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} z=40 \\ y=51 \\ x=29 \end{array}$$

Es decir, María tiene 29 años, Ana tiene 51 años y Carlos 40 años.

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1-F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2-F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{F_2:(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right) \overset{F_1-F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

Por tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

2. *(3,5 puntos)*

a) *(2 puntos)* Dada la función:

$$f = x^2 y$$

definida para $x \geq 0,\ y \geq 0$, encontrar el punto (x, y) que maximiza f sujeto a la restricción $x + y = 36$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+6x} - 2x\right)$$

SOLUCIÓN.

a) $f = x^2y = x^2(36-x) = 36x^2 - x^3 \quad \Rightarrow \quad f' = 72x - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x(24-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0\ ,\ x = 24$ (puntos críticos)

$f''=72-6x$ $\left|\begin{array}{l} f''(0)=72>0 \;\Rightarrow\; x=0 \text{ minimiza la función} \\ f''(24)=-72<0 \;\Rightarrow\; x=24 \text{ maximiza la función}\end{array}\right.$ es decir, el punto que maximiza f es $(24\,,12)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+6x}-2x\right)=\infty-\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+6x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+6x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+6x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+6x-4x^2}{\sqrt{4x^2+6x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{4x^2+6x}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{4x^2}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{2x+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6\cancel{x}}{4\cancel{x}}=\dfrac{3}{2}$

3. *(3 puntos)* El 47% de las personas de una ciudad son mujeres y el 53% restante hombres. De entre las mujeres, un 28% son jóvenes (entre 0 y 25 años), un 38% son adultas (entre 26 y 64 años) y un 34% son de la tercera edad (65 años o más). De entre los hombres, un 26% son jóvenes, un 43% son adultos y un 31% son de la tercera edad.

a) *(0,75 puntos)* Si elegimos una persona de la ciudad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de la tercera edad?

b) *(0,75 puntos)* Si elegimos una persona de la ciudad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la tercera edad?

c) *(0,75 puntos)* Si elegimos una persona de la ciudad al azar de entre las de la tercera edad, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

d) *(0,75 puntos)* Si elegimos una mujer de la ciudad al azar de entre las que tienen 26 años o más, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la tercera edad?

SOLUCIÓN.

Organicemos los datos del problema en una tabla de contingencia. Sobre un total de 100 personas:

	JÓVENES (J)	**ADULTOS (A)**	**TERCERA EDAD (T)**	**TOTAL**
MUJERES (M)	$47\times 0{,}28=$ **13,16**	$47\times 0{,}38=$ **17,86**	$47\times 0{,}34=$ **15,98**	**47**
HOMBRES (H)	$53\times 0{,}26=$ **13,78**	$53\times 0{,}43=$ **22,79**	$53\times 0{,}31=$ **16,43**	**53**
TOTAL	**26,94**	**40,65**	**32,41**	**100**

a) $p(M\cap T)=\dfrac{15{,}98}{100}=0{,}1598$

b) $p(T)=\dfrac{32{,}41}{100}=0{,}3241$

c) $p(M/T)=\dfrac{15{,}98}{32{,}41}=0{,}4931$

d) $p(T/M\cap A\cap T)=\dfrac{15{,}98}{17{,}86+15{,}98}=\dfrac{15{,}98}{33{,}84}=0{,}4722$

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Un deportista solamente puede tomar para desayunar barritas de chocolate y barritas de cereales. Cada barrita de chocolate proporciona 40 gramos de hidratos de carbono, 30 gramos de proteínas y 200 Kcal, mientras que cada barrita de cereales proporciona 80 gramos de hidratos de carbono, 10 gramos de proteínas y 100 Kcal. El deportista quiere tomar al menos 320 gramos de hidratos de carbono y 90 gramos de proteínas, pero no quiere tomar más de 1000 Kcal. El coste de cada barrita de chocolate es de 2 euros, mientras que el de cada barrita de cereales es de 1 euro. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas barritas de cada tipo tiene que tomar el deportista para desayunar de forma que cumpla las condiciones anteriores y gaste la menor cantidad de dinero.

SOLUCIÓN.

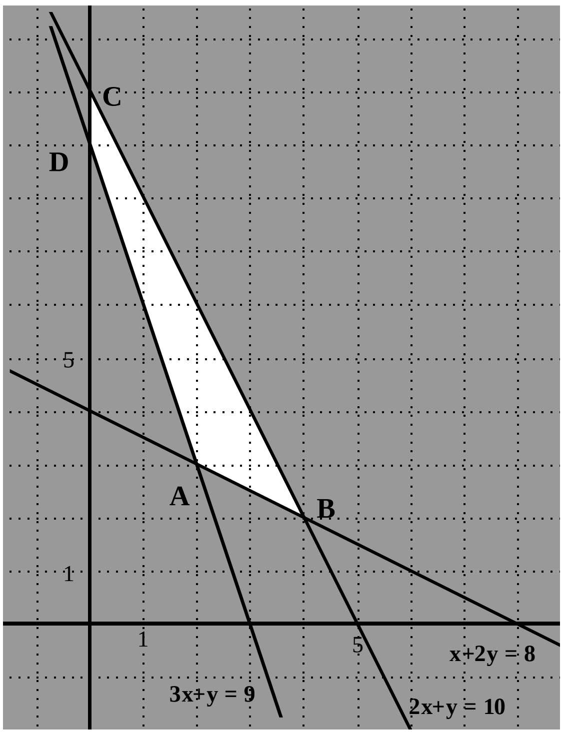
Es un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

	Nº	**Hidratos de carbono**	**Proteínas**	**Kilocalorías**	**Coste**
B. chocolate	x	40x	30x	200x	2x
B. cereales	y	80y	10y	100y	y
	$x \geq 0$ $y \geq 0$	$40x + 80y \geq 320$	$30x + 10y \geq 90$	$200x + 100y \leq 1000$	$F(x,y) = 2x + y$

La función objetivo, que debe ser mínima, es el coste: $F(x,y) = 2x + y$

El conjunto de restricciones a que debe estar sometida la solución es: $\left\{\begin{array}{c} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 40x + 80y \geq 320 \\ 30x + 10y \geq 90 \\ 200x + 100y \leq 1000 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 8 \\ 3x + y \geq 9 \\ 2x + y \leq 10 \end{array}\right.$

Obtengamos la región factible, es decir, el conjunto de puntos (x,y) que verifican todas las restricciones entre los que encontraremos la solución al problema:



La solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano situado a la derecha del eje de ordenadas.

La solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano situado por encima del eje de abscisas.

La recta de ecuación $x + 2y = 8$ pasa por los puntos $(0,4)$ y $(8,0)$. La solución de la inecuación $x + 2y \geq 8$ es el semiplano al que no pertenece el origen del sistema de coordenadas.

La recta de ecuación $3x + y = 9$ pasa por los puntos $(3,0)$ y $(0,9)$. La inecuación $3x + y \geq 9$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen.

La recta de ecuación $2x + y = 10$ pasa por los puntos $(5,0)$ y $(0,10)$. La solución de la inecuación $2x + y \leq 10$ es el semiplano al que pertenece el origen del sistema de coordenadas.

La región factible, solución del conjunto de restricciones, es el cuadrilátero ABCD. Como la solución óptima debe estar en alguno de sus vértices, calculemos las coordenadas de los mismos y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice A: $\begin{cases} 3x+y=9 \\ x+2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x-2y=-18 \\ x+2y=8 \end{cases} \Rightarrow -5x=-10 \Rightarrow x=2\ ,\ y=3 \Rightarrow f(2,3)=4+3=7$

Vértice B: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x+2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y=-20 \\ x+2y=8 \end{cases} \Rightarrow -3x=-12 \Rightarrow x=4\ ,\ y=2 \Rightarrow f(4,2)=10$

Vértice C: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow x=0\ ,\ y=10 \Rightarrow f(0,10)=10$

Vértice D: $\begin{cases} 3x+y=9 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow x=0\ ,\ y=9 \Rightarrow f(0,9)=9$

La función objetivo se minimiza en el vértice A. El deportista debe tomar entonces 2 barritas de chocolate y 3 barritas de cereales.

2. *(3,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2-16}{x-5}$$

Calcular:

a) *(0,5 puntos)* Dominio de f.

b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(0,75 puntos)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional cuyo dominio es: $D(f)=\mathbb{R}-\{\,5\,\}$

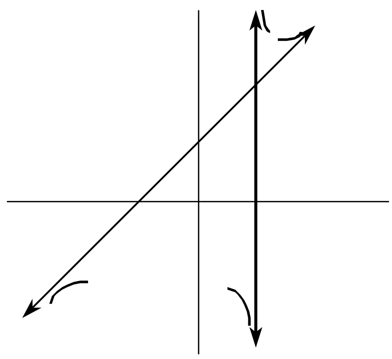
b) $f(x)=\dfrac{(x+4)(x-4)}{x-5}$

< 0		> 0		< 0		> 0
− · − / −	-4	+ · − / −	4	+ · + / −	5	+ · + / +

La función es positiva en $(-4\,,\,4)\cup(5\,,+\infty)$

c) • Asíntotas verticales: $x=5$ pues $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-16}{x-5}=\infty$.

Además: $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{x^2-16}{x-5}=-\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x^2-16}{x-5}=+\infty$



• Asíntotas horizontales u oblicuas: $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-5}=x+5+\dfrac{9}{x-5}$

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -16 & x-5 \\ \cline{3-3} -x^2+5x & & x+5 \\ \cline{1-1} & 5x-16 & \\ & -5x+25 & \\ \cline{2-2} & 9 & \end{array}$$

$y=x+5$ es una asíntota oblicua.

Además:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{9}{x-5}=0^- \quad , \quad \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{9}{x-5}=0^+$

3. *(3 puntos)* Se sabe que el coeficiente intelectual de una población sigue una distribución normal, con desviación típica igual a 20 y queremos construir un intervalo de confianza para su media.

a) *(2 puntos)* ¿Qué tamaño de la muestra debemos elegir para que el intervalo a nivel de confianza del 96% tenga una amplitud no superior a 10?

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de 200 individuos, les medimos el coeficiente intelectual y calculamos su promedio, que es igual a 90. Calcular el intervalo de confianza al 96% para la media del coeficiente intelectual de la población.

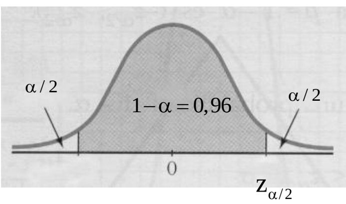
k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes

SOLUCIÓN.

a) El radio del intervalo de confianza (error máximo admisible) es la mitad de su amplitud. En este caso, 5.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5$$



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 96%:

$$1-\alpha = 0,96 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0,96 = 0,04 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = \frac{0,04}{2} = 0,02 \;\Rightarrow\; 1-0,02 = 0,98$$

Buscamos en la tabla el valor 0,98 y el más próximo (0,9798) se corresponde con un valor crítico de 2,05.

Tenemos entonces:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 \;\Rightarrow\; 2,05 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} = 5 \;\Rightarrow\; n = \left(\frac{2,05 \cdot 20}{5}\right)^2 = 67,24 \;\Rightarrow\;$$ el tamaño de la muestra debe ser de 68 habitantes.

b) El intervalo de confianza es $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(90 - 2,05 \cdot \frac{20}{\sqrt{200}} \;,\; 90 + 2,05 \cdot \frac{20}{\sqrt{200}}\right) = (87,1 \;;\; 92,9)$