Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

<u>OPCIÓN A</u>

1. *(3,5 puntos)* Discutir, según los valores de a, el sistema:

$$\begin{matrix} x+ay+z=-1 \\ -x+y+az=0 \\ 2x-y+z=a \end{matrix}$$

Resolverlo para $a=-2$.

SOLUCIÓN.

Estudiemos y comparemos los rangos de las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & 1 & a \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1+a & a+1 & -1 \\ 0 & -1-2a & -1 & a+2 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a+1 & a \\ 0 & -1-2a & -1 & a+2 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a+1 & a \\ 0 & 0 & 4a+4a^2 & 2a^2+2a+2 \end{array}\right)$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) F_2+F_1 ; F_3-2F_1 (2) $2F_2+F_3$ (3) $F_3+(1+2a)F_2$

$4a+4a^2=0 \Rightarrow 4a(1+a)=0 \Rightarrow a=0\ ,\ a=-1$

- Si $a\neq 0$ y $a\neq -1$: $\text{rg}A=\text{rg}B=3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado
- Si $a=0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg}A=2$ y $\text{rg}B=3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible
- Si $a=-1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg}A=2$ y $\text{rg}B=3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible
- Para $a=-2$, el sistema es compatible determinado. El sistema escalonado equivalente es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x-2y+z=-1 \\ y-3z=-2 \\ 8z=6 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} z=\frac{3}{4} \\ y=3z-2=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4} \\ x=2y-z-1=\frac{2}{4}-\frac{3}{4}-1=-\frac{5}{4} \end{array} \Rightarrow x=-\frac{5}{4}\ ,\ y=\frac{1}{4}\ ,\ z=\frac{3}{4}$$

2. a) *(2 puntos)* Disponemos de 15000 euros para la campaña de publicidad de un producto y los tenemos que invertir entre televisión y radio. Si llamamos x al dinero (en miles de euros) invertido en televisión e y al dinero (en miles de euros) invertido en radio, se estima que las ventas (en miles de unidades del producto) que haremos vendrán dadas por:

$$V=x^2y+27y+20$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en televisión y en radio para maximizar las ventas y cuál será el valor máximo de ventas que obtendremos.

b) *(1,5 puntos)* Calcular $\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN.

a) Inversión en televisión: x Inversión en radio: $y=15-x$

La función de ventas es: $V=x^2(15-x)+27(15-x)+20=-x^3+15x^2-27x+405$. Estudiemos cuándo se maximiza:

$$V' = -3x^2 + 30x - 27 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-30 \pm \sqrt{900-324}}{-6} = \frac{-30 \pm 24}{-6} = \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases}$$

Analicemos cuál de dichos valores críticos hace máxima la función:

$$V'' = -6x + 30 \quad \left| \begin{array}{l} V''(1) > 0 \;\Rightarrow\; \text{la función de ventas es mínima} \\ V''(9) < 0 \;\Rightarrow\; \text{la función de ventas es máxima} \end{array} \right.$$

Por tanto, debemos invertir 9000 € en televisión y 6000 € en radio.

$V(9,6) = 9^2 \cdot 6 + 27 \cdot 6 + 20 = 668 \;\Rightarrow\;$ La venta máxima es de 668000 unidades.

b) Calculemos una primitiva: $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{cambio de variable:} \\ x+1 = t \;\Rightarrow\; dx = dt \end{array} \right| = 2\int \frac{1}{t^2}\,dt = 2\int t^{-2}\,dt = 2\,\frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{2}{x+1}$

Así pues: $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x+1}\right]_0^1 = \left(-\frac{2}{2}\right) - \left(-\frac{2}{1}\right) = -1 + 2 = 1$

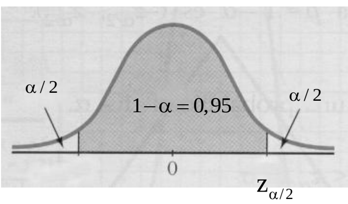
3. Una máquina fabrica tuercas con un diámetro interior (en milímetros) que es aleatorio, con distribución normal de desviación típica igual a 0,2 milímetros. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del diámetro interior de las tuercas.

a) *(2 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 95% tenga una amplitud menor o igual que 0,06 milímetros.

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 200, medimos el diámetro interior de las 200 tuercas y calculamos su promedio, que vale 2,57 milímetros. Construir el intervalo de confianza del 95% para la media del diámetro interior de las tuercas que fabrica la máquina.

SOLUCIÓN.

a) El radio del intervalo de confianza es $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}03$



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 95%:

$$1-\alpha = 0{,}95 \;\Rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025 \;\Rightarrow\; 1 - 0{,}025 = 0{,}975$$

Buscamos en la tabla el valor 0,975 y se corresponde con un valor crítico de 1,96.

Tenemos entonces:

$z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}06 \;\Rightarrow\; 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}2}{\sqrt{n}} = 0{,}03 \;\Rightarrow\; n = \left(\dfrac{1{,}96 \cdot 0{,}2}{0{,}03}\right)^2 = 170{,}7 \;\Rightarrow\;$ el tamaño de la muestra debe ser de 171 tuercas.

b) El intervalo de confianza es $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(2{,}57 - 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}2}{\sqrt{200}} \;,\; 2{,}57 + 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}2}{\sqrt{200}}\right) = (2{,}54 \;;\; 2{,}60)$

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kilo de pintura mate necesita 0,4 kilos de producto A y 0,6 kilos de producto B. Cada kilo de pintura brillante necesita 0,2 kilos de producto A y 0,8 kilos de producto B. La empresa no puede usar más de 200 kilos de producto A ni más de 500 kilos de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200 kilos de pintura mate y al menos 300 kilos de pintura brillante.

El beneficio por kilo de pintura mate es de 4 euros y el beneficio por kilo de pintura brillante es de 5 euros. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

SOLUCIÓN.

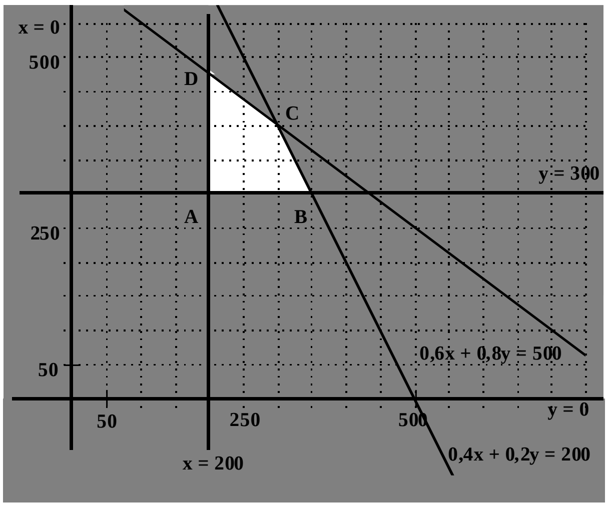
Es un problema de programación lineal. Organicemos en una tabla los datos del problema:

	Cantidad	**A**	**B**	**Beneficio**
Pintura mate	x	0,4x	0,6x	4x
Pintura brillante	y	0,2y	0,8y	5y
	$x \geq 200$ $y \geq 300$	$0,4x + 0,2y \leq 200$	$0,6x + 0,8y \leq 500$	$F(x\,,\,y) = 4x + 5y$

Así pues la función objetivo, que debe maximizarse, es: $F(x\,,\,y) = 4x + 5y$

El conjunto de restricciones a que debe someterse la solución es: $\begin{cases} x \geq 200 \\ y \geq 300 \\ 0,4x + 0,2y \leq 200 \\ 0,6x + 0,8y \leq 500 \end{cases}$

Dibujemos la región factible, solución del sistema de restricciones:



• La recta $x = 200$ es vertical. El semiplano solución de la inecuación $x \geq 200$ es el que se encuentra a su derecha.

• La recta $y = 300$ es horizontal. El semiplano solución de $y \geq 300$ es el que se encuentra por encima.

• La recta $0,4x + 0,2y = 200$ pasa por los puntos $(500\,,\,0)$ y $(300\,,\,400)$. El semiplano solución de $0,4x + 0,2y \leq 200$ es el que contiene al origen de coordenadas.

• La recta $0,6x + 0,8y = 500$ pasa por los puntos $(100\,,\,550)$ y $(300\,,\,400)$. El semiplano solución de $0,6x + 0,8y \leq 500$ es el que contiene al origen de coordenadas.

• La región factible es el cuadrilátero ABCD (en blanco)

• La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice A: $A(200\,,\,300) \Rightarrow F(200\,,\,300) = 2300$

Vértice B: $\begin{cases} y = 300 \\ 0,4x + 0,2y = 200 \end{cases} \Rightarrow 0,4x = 140 \Rightarrow x = 350 \Rightarrow B(350\,,\,300) \Rightarrow F(350\,,\,300) = 2900$

Vértice C: $\begin{cases} 0,4x + 0,2y = 200 \\ 0,6x + 0,8y = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,6x + 0,8y = 800 \\ -0,6x - 0,8y = -500 \end{cases} \Rightarrow x = 300\ ,\ y = \dfrac{200 - 120}{0,2} = 400 \Rightarrow C(300\,,\,400) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad F(300\,,400)=3200$

Vértice D: $\begin{cases} x=200 \\ 0{,}6x+0{,}8y=500 \end{cases} \Rightarrow \; y=475 \;\Rightarrow\; D(200\,,475) \;\Rightarrow\; F(200\,,475)=3175$

Para obtener el máximo beneficio debe fabricar 300 kilos de pintura mate y 400 kilos de pintura brillante. El beneficio máximo es de 3200 euros.

2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$, determinar:

a) *(0,5 puntos)* Su dominio.

b) *(0,5 puntos)* Sus cortes con los ejes.

c) *(1,25 puntos)* Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

SOLUCIÓN.

a) $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

b) • Corte con OX: $\begin{cases} y=\dfrac{x+2}{x+1} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \; x=-2 \;\Rightarrow\; (-2\,,0)$

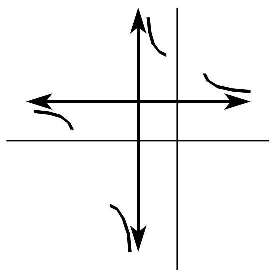
• Corte con OY: $\begin{cases} y=\dfrac{x+2}{x+1} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \; y=2 \;\Rightarrow\; (0\,,2)$

c) • Asíntotas verticales: $x=-1$ pues $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2}{x+1}=\infty$.

Además: $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x+2}{x+1}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+2}{x+1}=+\infty$

• Asíntota horizontal: $y=1$ pues $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+2}{x+1}=1$.

Además: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+2}{x+1}=1^-$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+2}{x+1}=1^+$



d) $f'(x)=\dfrac{x+1-x-2}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{(x+1)^2}<0 \;\; \forall x \;\; \Rightarrow$ la función es decreciente en su dominio.

3. En un centro de enseñanza los alumnos pueden hacer uso o no del comedor. La distribución de alumnos en los tres cursos del centro es la siguiente:

	Primer curso	Segundo curso	Tercer curso
Hace uso del comedor	67	60	57
No hace uso del comedor	23	20	18

a) *(1 punto)* Se escoge al azar un alumno del centro; ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo curso y haga uso del comedor?

b) *(1 punto)* Se escoge al azar un alumno de los que hacen uso del comedor; ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo curso?

c) *(1 punto)* Se escogen al azar dos alumnos distintos del centro; ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo curso?

SOLUCIÓN.

Completemos la tabla de contingencia con los totales:

	Primer curso (P)	Segundo curso (S)	Tercer curso (T)	TOTAL
Hace uso del comedor (C)	67	60	57	184
No hace uso del comedor $(\overline{C})$	23	20	18	61
TOTAL	90	80	75	245

a) $p(S \cap C) = \frac{60}{245} = 0,2449$

b) $p(S / C) = \frac{60}{184} = 0,3261$

c) $p\left[(P_1 \cap P_2) \cup (S_1 \cap S_2) \cup (T_1 \cap T_2)\right] = p(P_1 \cap P_2) + p(S_1 \cap S_2) + p(T_1 \cap T_2) =$

$$= p(P_1) \cdot p(P_2 / P_1) + p(S_1) \cdot p(S_2 / S_1) + p(T_1) \cdot p(T_2 / T_1) = \frac{90}{245} \cdot \frac{89}{244} + \frac{80}{245} \cdot \frac{79}{244} + \frac{75}{245} \cdot \frac{74}{244} =$$

$$= \frac{8010}{59780} + \frac{6320}{59780} + \frac{5550}{59780} = \frac{19880}{59780} = 0,3326$$