Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $3X + 2A = BC$.

b) *(2 puntos)* Encontrar, si existe, la matriz inversa de A.

SOLUCIÓN.

a) Calculemos BC y 2A: $\quad \mathrm{BC} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad 2\mathrm{A} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Se tiene: $\quad 3\mathrm{X} + 2\mathrm{A} = \mathrm{BC} \;\Rightarrow\; 3\mathrm{X} = \mathrm{BC} - 2\mathrm{A} \;\Rightarrow\; \mathrm{X} = \frac{1}{3}(\mathrm{BC} - 2\mathrm{A}) = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}\right] =$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & -7 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1 \\ 5/3 & -4/3 & -7/3 \\ 5/3 & -7/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{F2+3F1 \\ F3+F1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F2:2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F3-3F2}{\sim}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right) \overset{-F3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & -1 \end{array}\right) \overset{F1+F3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 9/2 & 3/2 & -1 \\ 3/2 & 1/2 & 0 \\ 7/2 & 3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Tenemos que invertir en un fondo de inversión una cantidad de dinero mayor o igual que 1000 euros y menor o igual que 9000 euros. El beneficio B que se obtiene depende de la cantidad invertida x de la siguiente manera:

$$B(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 \le x < 4 \\ -x^2 + 10x - 21 & \text{si } 4 \le x \le 9 \end{cases}$$

donde tanto x como $B(x)$ están expresadas en miles de euros.

a) *(1 punto)* Estudiar la continuidad de la función B en el intervalo $(1,9)$.

b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de $x \in [1,9]$ el beneficio es positivo?

c) *(1,5 puntos)* Encontrar el máximo valor que alcanza el beneficio con $x \in [4,9]$.

SOLUCIÓN.

a) Las dos funciones que definen $B(x)$ son polinómicas y por tanto continuas en sus dominios. Veamos si lo es en $x=4$:

· $\exists B(4) = -16+40-21 = 3$

· $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} B(x) = \lim\limits_{x\to 4} (x-1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} B(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} (-x^2+10x-21) = 3 \end{array}\right| \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 4} B(x) = 3$

· $\lim\limits_{x\to 4} B(x) = B(4)$

Por tanto, la función $B(x)$ es continua en $(1,9)$

b) · $x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow B(x)>0 \;\; \forall x \in (1,4)$

· $-x^2+10x-21=0 \Rightarrow x = \dfrac{-10\pm\sqrt{100-84}}{-2} = \dfrac{-10\pm 4}{-2} = \begin{array}{l} 3 \\ 7 \end{array} \Rightarrow B(x)>0 \;\; \forall x\in[4,7)$

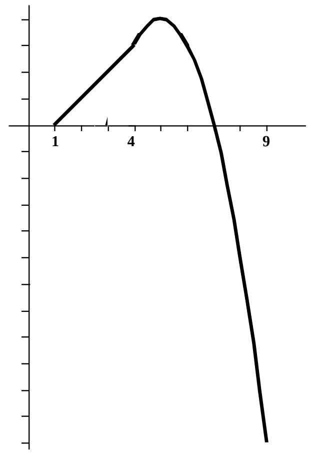
Luego el beneficio es positivo para $x\in(1,7)$

c) Con $x\in[4,9]$: $B(x) = -x^2+10x-21 \Rightarrow B'(x) = -2x+10 = 0 \Rightarrow x=5$ (punto crítico).

Y como $B''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ En $x=5$ la función es máxima y de valor $B(5)=4$. Es decir, el beneficio es máximo cuando la inversión sea de 5000 euros y será de 4000 euros.

- Otra forma -

Podríamos haber dado respuesta a todas las cuestiones planteadas a partir de la gráfica de la función $B(x)$:



3. Una madre y su hija lanzan un dado cada una. La que obtiene la puntuación más alta gana y si las dos obtienen la misma puntuación entonces gana la hija.

a) *(1,5 puntos)* Calcular la probabilidad de que gane la hija.

b) *(1,5 puntos)* Si ha ganado la madre, ¿cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida por la hija haya sido 4?

SOLUCIÓN.

Los resultados posibles en el orden $(\text{Madre}, \text{Hija})$, y la ganadora en cada caso, son:

$(1,1)\to H$	$(1,2)\to H$	$(1,3)\to H$	$(1,4)\to H$	$(1,5)\to H$	$(1,6)\to H$
$(2,1)\to M$	$(2,2)\to H$	$(2,3)\to H$	$(2,4)\to H$	$(2,5)\to H$	$(2,6)\to H$
$(3,1)\to M$	$(3,2)\to M$	$(3,3)\to H$	$(3,4)\to H$	$(3,5)\to H$	$(3,6)\to H$
$(4,1)\to M$	$(4,2)\to M$	$(4,3)\to M$	$(4,4)\to H$	$(4,5)\to H$	$(4,6)\to H$
$(5,1)\to M$	$(5,2)\to M$	$(5,3)\to M$	$(5,4)\to M$	$(5,5)\to H$	$(5,6)\to H$
$(6,1)\to M$	$(6,2)\to M$	$(6,3)\to M$	$(6,4)\to M$	$(6,5)\to M$	$(6,6)\to H$

a) $p(H) = \dfrac{21}{36} = 0{,}58$

b) $p(H=4/M) = \dfrac{2}{15} = 0{,}13$

OPCIÓN B

1. *(3,5 puntos)* Una empresa va a invertir en dos productos financieros A y B, para lo cual dispone de un total de 12 millones de euros, aunque no es necesario que invierta todo el dinero. Por razones legales debe invertir al menos 2 millones de euros en cada uno de los dos productos A y B y, además, tiene que invertir en A al menos el doble de lo que invierta en B.

El beneficio que le reporta cada euro invertido en el producto A es de 0,2 euros y el beneficio que le reporta cada euro invertido en el producto B es de 0,4 euros, mientras que por cada euro que no invierta en ninguno de los dos productos tendrá un beneficio de 0,3 euros. ¿Qué cantidad de dinero debe invertir la empresa en cada producto para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

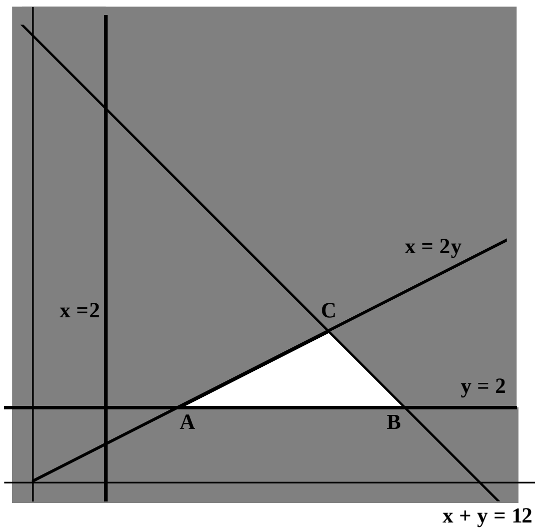
PRODUCTOS	INVERSIÓN	BENEFICIO
A	x euros	0,2x
B	y euros	0,4y

Las condiciones relacionadas con la inversión (restricciones), son:

$$x + y \le 12$$
$$x \ge 2$$
$$y \ge 2$$
$$x \ge 2y$$

La función objetivo, relacionada con los beneficios, es: $F(x\,,\,y) = 0,2x + 0,4y + 0,3\cdot(12 - x - y) = -0,1x + 0,1y + 3,6$

Obtengamos gráficamente la región factible, solución del sistema de restricciones:



· La recta $x + y = 12$ pasa por los puntos $(12\,,0)$ y $(0\,,12)$. El semiplano solución de la inecuación $x + y \le 12$ es el que contiene al origen de coordenadas.

· El semiplano solución de $x \ge 2$ es el que está a la derecha de la recta $x = 2$.

· El semiplano solución de $y \ge 2$ es el superior a la recta $y = 2$.

· La recta $x = 2y$ pasa por los puntos $(0\,,0)$ y $(2\,,1)$. El semiplano solución de la inecuación $x \ge 2y$ es el que contiene al punto $(1\,,0)$.

La región factible es el triángulo ABC. En alguno (algunos) de sus vértices se tendrá la solución óptima. Calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$A(4\,,2) \;\Rightarrow\; F(4\,,2) = 3,4$$
$$B(10\,,2) \;\Rightarrow\; F(10\,,2) = 2,8$$
$$C(8\,,4) \;\Rightarrow\; F(8\,,4) = 3,2$$

Por lo tanto la empresa debe invertir 4 millones de euros en A y 2 millones en B para maximizar sus beneficios que serán de 3,4 millones de euros.

2. a) *(2 puntos)* Encontrar los extremos absolutos de la función:

$$f(x) = -2x^2 + 12x - 16$$

en el intervalo $x \in [1,4]$

b) *(1,5 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 6x\right) dx$$

SOLUCIÓN.

a) La función es continua y sus extremos absolutos los alcanzará en sus puntos de máximo o de mínimo relativos o en los extremos del intervalo. Obtengamos sus máximos o mínimos relativos:

$f'(x) = -4x + 12 = 0 \;\Rightarrow\; x = 3$ y como $f''(x) = -4 < 0 \;\Rightarrow$ en $x = 3$ tiene un máximo relativo: $(3\,,2)$

Veamos el valor de la función en los extremos del intervalo: $f(1) = -6$, $f(4) = 0$

Por lo tanto, el máximo absoluto lo alcanza en $x = 3$ y el mínimo absoluto en $x = 1$.

b) $\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 6x\right) dx = \left[4\ln x - 3x^2\right]_1^2 = (4\ln 2 - 12) - (0 - 3) = 4\ln 2 - 9 \simeq -6{,}227$

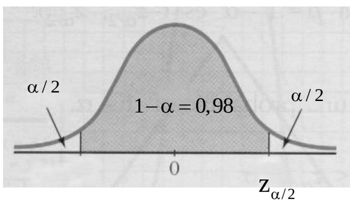
3. El peso (en gramos) de las naranjas de un agricultor es aleatorio, con distribución normal de desviación típica igual a 30 gramos. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las naranjas del agricultor.

a) *(2 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 98% tenga una amplitud menor o igual que 10 gramos.

b) *(1 punto)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 100; pesamos las 100 naranjas y calculamos su promedio, que es igual a 160 gramos. Construir el intervalo de confianza del 98% para la media del peso de las naranjas del agricultor.

SOLUCIÓN.

a) El radio del intervalo de confianza (en este caso, 5 gramos) es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$.



Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza del 98%:

$1 - \alpha = 0{,}98 \;\Rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}02}{2} = 0{,}01 \;\Rightarrow\; 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

Buscamos en la tabla el valor 0,99 y el valor crítico más próximo es 2,33.

Tenemos entonces:

$n = \left(\frac{2{,}33 \cdot 30}{5}\right)^2 = 195{,}44 \;\Rightarrow$ el tamaño de la muestra debe ser de 196 naranjas.

b) El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(160 - 2{,}33 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} \;,\; 160 + 2{,}33 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}}\right) = (153{,}01 \;;\; 166{,}99) \text{ en gramos}$$