El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. La suma de la inversión en acciones de una empresa textil, una empresa de gas y una compañía de telefonía es de 7400 €. Las acciones de la empresa textil pagan un 2% de interés anual, las de la empresa de gas un 4% y las de la compañía de telefonía pagan un 5%. La suma del interés anual es de 278 €. La inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 1000 € menos que la suma de la inversión en acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas.

a) *(0,75 puntos)* Plantear un sistema lineal que permita calcular la cantidad invertida en cada una de las acciones.

b) *(0,75 puntos)* Calcular la cantidad invertida en cada una de las acciones.

c) *(1 punto)* ¿Podemos calcular el capital invertido en cada una de las acciones si cambiamos la tercera condición por *"el doble de la inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 2000 € menos que la diferencia de la inversión en las acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas"*?

d) *(1 punto)* Llamando A a la matriz de coeficientes obtenida en el apartado c), resolver el sistema lineal $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN.

a) Sea x la inversión en la empresa textil, y la inversión en la empresa de gas, z la inversión en la compañía de telefonía. Se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=7400 \\ 0,02x+0,04y+0,05z=278 \\ z=x+y-1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=7400 \\ 2x+4y+5z=27800 \\ x+y-z=1000 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema planteado (utilizamos el método de Gauss). Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7400 \\ 2 & 4 & 5 & 27800 \\ 1 & 1 & -1 & 1000 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{F2-2F1}{F3-F1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7400 \\ 0 & 2 & 3 & 13000 \\ 0 & 0 & -2 & -6400 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=7400 \\ 2y+3z=13000 \\ 2z=6400 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z=3200 \\ y=1700 \\ x=2500 \end{array}$$

Es decir, se han invertido 2500 € en la empresa textil, 1700 € en la de gas y 3200 € en la compañía de telefonía.

c) Ahora el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x+y+z=7400 \\ 0,02x+0,04y+0,05z=278 \\ 2z=x-y-2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=7400 \\ 2x+4y+5z=27800 \\ x-y-2z=2000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7400 \\ 2 & 4 & 5 & 27800 \\ 1 & -1 & -2 & 2000 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{F2-2F1}{F3-F1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7400 \\ 0 & 2 & 3 & 13000 \\ 0 & -2 & -3 & -5400 \end{array}\right) \overset{F3+F2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7400 \\ 0 & 2 & 3 & 13000 \\ 0 & 0 & 0 & 7600 \end{array}\right)$$

El sistema es ahora incompatible pues los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada son distintos. No se puede obtener la cantidad invertida en cada una de las empresas.

d) Se trata de un sistema homogéneo (los términos independientes son nulos) El sistema es compatible indeterminado pues, por el apartado anterior: $\text{rg}\, A = 2 < \text{n}^\text{o}$ de incógnitas .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z=\lambda \\ y=-\tfrac{3}{2}\lambda \\ x=\tfrac{1}{2}\lambda \end{array}$$

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **a2)** $g(x)=\dfrac{x^{3/2}}{(x+1)^3}$

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\int_1^4 \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

c) Considerar la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

c1) *(0,5 puntos)* Hallar el dominio de definición de f.
c2) *(1 punto)* Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f así como sus máximos y mínimos.
c3) *(0,5 puntos)* Hallar los puntos de inflexión de f.

SOLUCIÓN.

a) **a1)** $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{(1+x)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=-\dfrac{1}{1+x}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{1-x^2}}$

a2) $g'(x)=\dfrac{\frac{3}{2}x^{1/2}\cdot(x+1)^3-x^{3/2}\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=\dfrac{3x^{1/2}\cdot(x+1)^2\cdot\left[\frac{1}{2}(x+1)-x^3\right]}{(x+1)^6}=\dfrac{3\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-x^3\right)}{(x+1)^4}$

b) $\int\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left|\ \sqrt{x}=t\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=dt\ \right|=2\int e^t\,dt=2e^{\sqrt{x}}\ \Rightarrow\ \int_1^4\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^4=2e^2-2e$

c) **c1)** Por tratarse de una función racional, el dominio es el conjunto de los números reales excepto los que anulan el denominador: $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

c2) $f'(x)=\dfrac{3x^2(x-1)^2-x^3 2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{x^2(x-1)[3x-3-2x]}{(x-1)^4}=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0\ \Rightarrow\ \left|\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

Se tiene:

f ' > 0		f ' > 0		f ' < 0		f ' > 0
	0		1		3	

La función es creciente en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ y decreciente en $(1,3)$

$$f''(x)=\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{3x(x-1)^2\left[(x-2)(x-1)-x^2+3x\right]}{(x-1)^6}=\frac{6x}{(x-1)^4}$$

$f''(0)=0$; $f'''(x)=\dfrac{6(x-1)^4-6x\cdot 4(x-1)^3}{(x-1)^8}$; $f'''(0)\neq 0\ \Rightarrow\ x=0$ es un punto de inflexión

$f''(3)>0\ \Rightarrow\ x=3$ es un mínimo relativo: $\left(3\,,\,\dfrac{27}{4}\right)$

c3) El único punto de inflexión de la función ya ha aparecido en el apartado anterior: $(0\,,0)$

3. Luis y Ramón son jugadores de baloncesto. Luis encesta 3 de cada 5 tiros y Ramón 5 de cada 8. Si ambos tiran a canasta una sola vez, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) *(1 punto)* Únicamente Luis ha encestado.

b) *(1 punto)* Ambos han encestado.

c) *(1 punto)* Al menos uno ha encestado.

SOLUCIÓN.

Sea L el suceso "Luis ha encestado": $p(L)=\frac{3}{5}=0,6$. Sea R el suceso "Ramón ha encestado": $p(R)=\frac{5}{8}=0,625$.
Los sucesos son independientes.

a) $p\left(L\cap\overline{R}\right)=p\left(L\right)\cdot p\left(\overline{R}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{40}=0,225$

b) $p\left(L\cap R\right)=p\left(L\right)\cdot p\left(R\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3}{8}=0,375$

c) El suceso "al menos uno ha encestado" es el suceso contrario a "ninguno ha encestado":

$$p\left(\overline{L}\cap\overline{R}\right)=p\left(\overline{L}\right)\cdot p\left(\overline{R}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{6}{40}=0,15 \quad\Rightarrow\quad p\left(\overline{\overline{L}\cap\overline{R}}\right)=1-0,15=0,85$$

OPCIÓN B

1. Considerar $T=\left\{\left(x,y\right)/\ y\geq\frac{1}{3}x\ ,\ y\leq 4x\ ,\ 2x+y\leq 4\ ,\ x+2y\leq 4\right\}$.

a) *(1 punto)* Representar gráficamente el conjunto anterior.

b) *(1,5 puntos)* Calcular los extremos de la función $2x+y$ sobre el conjunto T.

c) *(1 punto)* Calcular los extremos de $2x+y$ si añadimos al conjunto T la restricción $x+y\geq 1$.

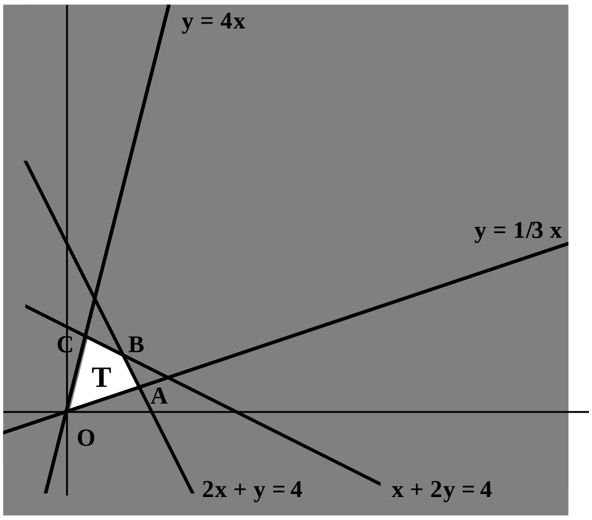
SOLUCIÓN.

a) • La recta $y=\frac{1}{3}x$ pasa por los puntos $\left(0,0\right)$ y $\left(3,1\right)$. La solución de la inecuación $y\geq\frac{1}{3}x$ es el semiplano que contiene al punto $\left(0,1\right)$, por ejemplo.

• La recta $y=4x$ pasa por $\left(0,0\right)$ y $\left(1,4\right)$. El semiplano solución de $y\leq 4x$ es el que contiene al punto $\left(1,0\right)$, por ejemplo.

• La recta $2x+y=4$ pasa por los puntos $\left(0,4\right)$ y $\left(2,0\right)$. La solución de $2x+y\leq 4$ es el semiplano que contiene al origen de coordenadas.

• La recta $x+2y=4$ pasa por los puntos $\left(0,2\right)$ y $\left(4,0\right)$. La solución de $x+2y\leq 4$ es el semiplano que contiene al origen de coordenadas.



La intersección de todos los semiplanos soluciones es el cuadrilátero O, A, B y C señalado en blanco.

b) La función $f\left(x,y\right)=2x+y$ se optimiza en alguno (algunos) de los vértices de la región factible T. Calculemos las coordenadas de los vértices y el valor de la función en ellos:

• $O\left(0,0\right)\ \Rightarrow\ f\left(0,0\right)=0$

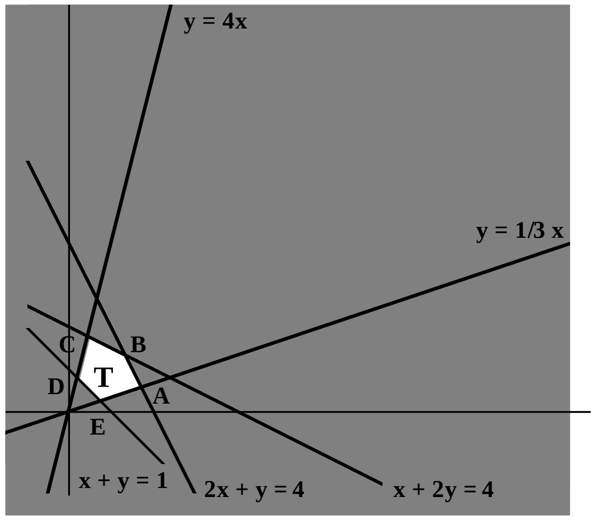
• $\left\{\begin{array}{l} y=1/3\,x \\ 2x+y=4\end{array}\right.\ \Rightarrow\ 2x+\frac{x}{3}=4\ \Rightarrow\ 7x=12\ \Rightarrow\ x=\frac{12}{7}\ ,\ y=\frac{4}{7}\ \Rightarrow\ A\left(\frac{12}{7},\frac{4}{7}\right)\ \Rightarrow\ f\left(\frac{12}{7},\frac{4}{7}\right)=4$

• $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ x+2y=4\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} -2x-y=-4 \\ 2x+4y=8\end{array}\right.\ \Rightarrow\ 3y=4\ \Rightarrow\ y=\frac{4}{3}\ ,\ x=\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ B\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)\ \Rightarrow\ f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=4$

• $\left\{\begin{array}{l} y=4x \\ x+2y=4\end{array}\right.\ \Rightarrow\ 9x=4\ \Rightarrow\ x=\frac{4}{9}\ ,\ y=\frac{16}{9}\ \Rightarrow\ C\left(\frac{4}{9},\frac{16}{9}\right)\ \Rightarrow\ f\left(\frac{4}{9},\frac{16}{9}\right)=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$

El valor mínimo lo alcanza la función en el origen $O(0,0)$. El valor máximo lo alcanza en cualquiera de los puntos del segmento AB.

c) La recta $x+y=1$ pasa por los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$. La solución de la inecuación $x+y\geq 1$ es el semiplano que no contiene al origen de coordenadas.



Ahora, la región factible T es el pentágono ABCDE. Los vértices A, B y C son los mismos del apartado anterior y los valores de la función $f(x,y)=2x+y$ en ellos ya han sido calculados.

Los nuevos vértices son D y E:

- $\begin{cases} y=4x \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{5}\ ,\ y=\frac{4}{5} \Rightarrow D\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right) \Rightarrow$

  $\Rightarrow f\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)=\frac{6}{5}$

- $\begin{cases} y=1/3\,x \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x+\frac{1}{3}x=1 \Rightarrow 4x=3 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x=\frac{3}{4}\ ,\ y=\frac{1}{4} \Rightarrow E\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) \Rightarrow f\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$

Ahora el mínimo lo alcanza en el vértice $D\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$ y el máximo sigue alcanzándolo en cualquier punto del segmento AB.

2. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\frac{1}{x}+2\ln x-\frac{\ln x}{x}$ **a2)** $g(x)=\frac{e^x}{(x-1)^2}$.

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\int_0^2 \left(4x^3+e^{3x}\right)dx$.

c) Se ha realizado una encuesta a una determinada población con el fin de determinar el número de personas que utilizarían el sistema de autobuses si la tarifa admitiera distintos importes. Basándose en los resultados de las encuestas, los analistas de sistemas han determinado una función aproximada que expresa el número diario de pasajeros en función de la tarifa. La función demanda viene dada por $D(x)=\sqrt{10+3x-\frac{5}{4}x^2}$, donde x representa la tarifa en euros.

c1) *(1 punto)* ¿Qué tarifa habrá que aplicar para obtener el mayor número de pasajeros?

c2) *(1 punto)* Si la tarifa aplicada está entre 1 y 2 euros, ¿cómo es la variación en la afluencia de pasajeros? ¿Creciente, decreciente?

SOLUCIÓN.

a) **a1)** $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}=\frac{-2+2x+\ln x}{x^2}$

a2) $g'(x)=\frac{e^x\cdot(x-1)^2-e^x\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{e^x\cdot(x-1)\cdot[x-1-2]}{(x-1)^4}=\frac{e^x\cdot(x-3)}{(x-1)^3}$

b) Una primitiva de la función es: $\int\left(4x^3+e^{3x}\right)dx=4\int x^3\,dx+\frac{1}{3}\int 3e^{3x}\,dx=\frac{4x^4}{4}+\frac{1}{3}e^{3x}=x^4+\frac{1}{3}e^{3x}$ luego:

$$\int_0^2 \left(4x^3+e^{3x}\right)dx=\left[x^4+\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^2=\left(16+\frac{e^6}{3}\right)-\left(0+\frac{1}{3}\right)=\frac{e^6+47}{3}$$

c) **c1)** $D'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{10+3x-\frac{5}{4}x^2}}\cdot\left(3-\frac{5}{2}x\right)=0 \;\Rightarrow\; 3-\frac{5}{2}x=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{6}{5}=1,20\text{ €}$

$$D''(x)=\frac{-\frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{10+3x-\frac{5}{2}x^2}-\left(3-\frac{5}{2}x\right)\cdot 2\,\dfrac{1}{2\sqrt{10+3x-\frac{5}{4}x^2}}\left(3-\frac{5}{2}x\right)}{4\left(10+3x-\frac{5}{2}x^2\right)}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; D''\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{-5\cdot\sqrt{10+\frac{18}{5}-\frac{5}{2}\cdot\frac{36}{25}}-0}{4\left(10+\frac{18}{5}-\frac{5}{2}\cdot\frac{36}{25}\right)}<0 \;\Rightarrow\; x=\frac{6}{5}\text{ máximo}$$

La tarifa debe ser de 1,20 € para obtener el mayor número de pasajeros.

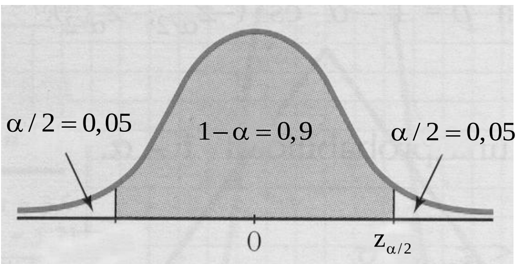
c2) Entre 1 y 1,20 euros, la afluencia de pasajeros será creciente. Entre 1,20 y 2 euros, la afluencia será decreciente.

3. La cantidad de refresco que se sirve en cada vaso a la entrada de unos cines está normalmente distribuida con una desviación típica de 15 ml. Hemos medido las cantidades en los vasos de los 25 asistentes de una determinada sesión que compraron un refresco y hemos obtenido un promedio de 200,8 ml. Fijado un nivel de confianza del 90%, calcular el intervalo de confianza para la media de la cantidad de refresco que se sirve en cada vaso.

Detallar los pasos realizados para obtener los resultados.

SOLUCIÓN.

Como la población es normal, la distribución muestral de medias también lo es.



El nivel de confianza es $1-\alpha=0,9 \;\Rightarrow\; \alpha=0,1 \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2}=0,05$

El valor crítico es $F\left(z_{\alpha/2}\right)=0,9+0,05=0,95 \;\overset{(1)}{\Rightarrow}\; z_{\alpha/2}=1,645$

(1) obtenido en la tabla de la $N(0,1)$

El radio del intervalo de confianza es:

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,645\cdot\frac{15}{\sqrt{25}}=4,935$$

por lo que el intervalo de confianza para la media es $(200,8-4,935\,;\,200,8+4,935)=(195,865\,;\,205,735)$ en ml.