

El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

**OPCIÓN A**

1. Una perfumería desea liquidar 100 frascos de perfume y 150 barras de labios que han quedado descatalogados en sus firmas, para ello lanza dos ofertas A y B. La oferta A consiste en un lote de un frasco de perfume y una barra de labios que se vende a 30 €. La oferta B consiste en un frasco de perfume y dos barras de labios que se vende a 40 €. No desea ofrecer menos de 10 lotes de la oferta A ni menos de 20 de la oferta B.

a) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar la ganancia? (2,5 puntos)

b) ¿Cambiaría la respuesta al apartado a) si eliminamos el hecho de que desee ofrecer al menos 20 lotes de la oferta B? (1 punto)

**SOLUCIÓN.**

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en forma de tabla para escribir cómodamente la función objetivo y las restricciones:

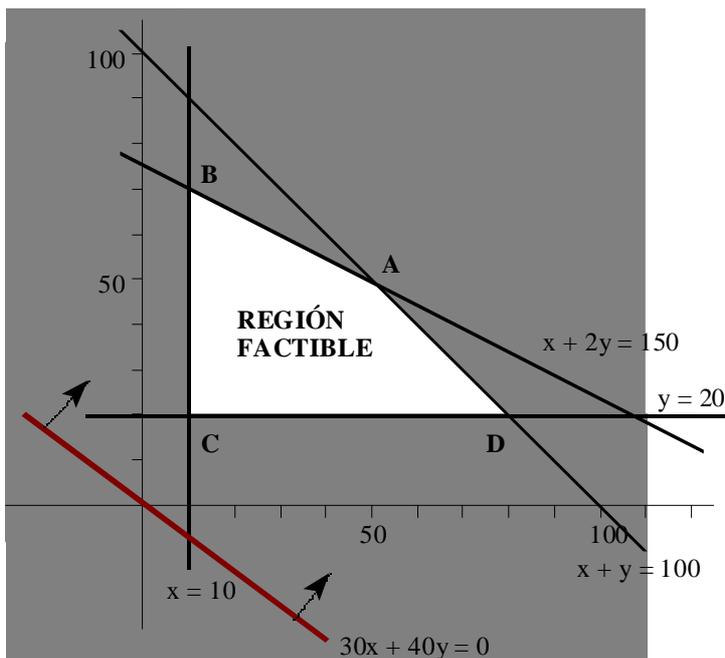
LOTES	NÚMERO	FRASCOS P.	BARRAS L.	VENTA
A	x	x	x	30x
B	y	y	2y	40y
	$x \geq 10$ $y \geq 20$	$x + y \leq 100$	$x + 2y \leq 150$	$f(x, y) = 30x + 40y$

La función objetivo, que debe maximizarse, es  $f(x, y) = 30x + 40y$

El conjunto de restricciones es:  $\{ x \geq 10 ; y \geq 20 ; x + y \leq 100 , x + 2y \leq 150 \}$

Dibujemos la región factible:

- La inecuación  $x \geq 10$  tiene por solución el semiplano a la derecha de la recta  $x = 10$
- La inecuación  $y \geq 20$  tiene por solución el semiplano que está por encima de la recta  $y = 20$
- La recta  $x + y = 100$  pasa por los puntos  $(100, 0)$  y  $(0, 100)$ . El semiplano al que pertenece el origen de coordenadas es la solución de la inecuación  $x + y \leq 100$
- La recta  $x + 2y = 150$  pasa por los puntos  $(10, 70)$  y  $(90, 30)$  por ejemplo. El semiplano solución es el que contiene al origen de coordenadas.



El nivel 0 de la función objetivo:

$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow 30x + 40y = 0$  es una recta que pasa por el origen de coordenadas  $(0, 0)$  y por el punto  $(40, -30)$ .

Al trasladarla, paralelamente a sí misma, hacia la región factible, el último vértice que toca es el  $A(50, 50)$  que es el que maximiza a la función objetivo.

Por tanto, debe vender 50 lotes de cada oferta.

b) Desaparece una restricción:  $y \geq 20$ . La región factible es ahora abierta pero la solución no cambia pues el último vértice de la misma que toca  $f(x, y) = 0$  al trasladarse hacia la derecha sigue siendo el A.

2. a) Derive las siguientes funciones  $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ,  $g(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ , (1 punto)

b) Calcule  $\int_1^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) dx$ . (0,5 puntos)

**SOLUCIÓN.**

a) -  $f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x + \frac{x}{\sqrt{x}}} = -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x\sqrt{x} + x)} = -\frac{1}{2x(\sqrt{x} + 1)}$

-  $g'(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(x + x e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

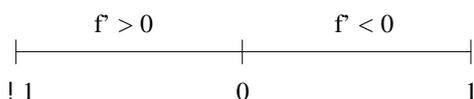
b) Obtengamos una primitiva de la función:  $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) dx = \int x^{-1/2} dx - \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} - \ln|x| = 2\sqrt{x} - \ln|x|$

y entonces:  $\int_1^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) dx = \left[2\sqrt{x} - \ln|x|\right]_1^3 = 2\sqrt{3} - \ln 3 - 2$

3. Halle el dominio de definición, los máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = \ln(1 - x^2)$ . (2 puntos)

**SOLUCIÓN.**

- Dominio de definición:  $1 - x^2 > 0 \Rightarrow (1+x)(1-x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)$ . Por tanto:  $D(f) = (-1, 1)$
- Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento:  $f'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$



Es creciente en  $(-1, 0)$  y decreciente en  $(0, 1)$  y como se trata de una función continua en su dominio, en  $x = 0$  tiene un máximo relativo.

4. En el departamento textil de unos grandes almacenes se encuentran mezcladas y a la venta 100 camisetas de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que una camiseta tenga tara es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige una camiseta al azar.

- a) Calcule la probabilidad de que la camiseta tenga tara. (1 punto)
- b) Calcule la probabilidad de que la camiseta sea de la marca B. (1 punto)
- c) Sabiendo que la camiseta elegida tiene tara, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?. (1 punto)

**SOLUCIÓN.**

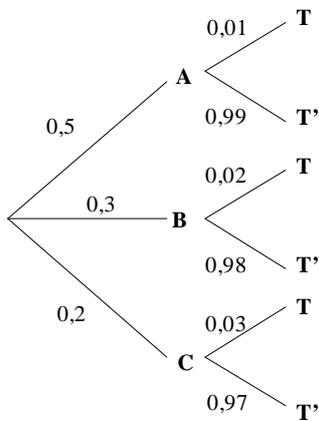
Sea A el suceso "la camiseta elegida es de la marca A. Su probabilidad es:  $p(A) = \frac{100}{200} = 0,5$

Sea B el suceso "la camiseta elegida es de la marca B" cuya probabilidad es:  $p(B) = \frac{60}{200} = 0,3$

Sea C el suceso "la camiseta elegida es de la marca C" cuya probabilidad es:  $p(C) = \frac{40}{200} = 0,2$

Sea T el suceso “la camiseta elegida tiene tara” y T’ su suceso contrario “la camiseta elegida no tiene tara”.

Organicemos las posibles situaciones mediante un diagrama de árbol:



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(T) = p(A) \cdot p(T/A) + p(B) \cdot p(T/B) + p(C) \cdot p(T/C) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,03 = 0,017$$

b)  $p(B) = 0,3$

c) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(B/T) = \frac{p(B) \cdot p(T/B)}{p(T)} = \frac{0,3 \cdot 0,02}{0,017} = 0,353$$

### OPCIÓN B

1. Considere las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

a) Calcule la matriz inversa de la matriz  $B - I_3$  con  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . (0,75 puntos)

b) Calcule una matriz  $X$  tal que  $BX - 4A = X$ . (1,25 puntos)

**SOLUCIÓN.**

$$a) B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_1 + F_3, F_2 + F_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow (B - I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) BX - 4A = X \Leftrightarrow BX - X = 4A \Leftrightarrow (B - I_3)X = 4A \Leftrightarrow X = (B - I_3)^{-1} \cdot 4A$$

Por lo tanto: 
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Considere la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

a) Calcule el rango de la matriz  $A$ . (0,5 puntos)

b) Aplicar el apartado a) para resolver el sistema lineal  $AX = 0$ . (1 punto)

**SOLUCIÓN.**

a) 
$$\text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \stackrel{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \stackrel{F_3 + 3F_2}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg } A = 3$$

b) Puesto que el rango de la matriz de los coeficientes es 3, el sistema homogéneo es compatible determinado y su única solución es la trivial:  $x = y = z = 0$

3. a) Calcule las derivadas de las funciones  $f(x) = \ln \frac{x^2}{\sqrt{x+3}}$ ,  $g(x) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}$ . (1 punto)

b) Calcule  $\int_0^1 (x - e^{-2x}) dx$ . (0,5 puntos)

**SOLUCIÓN.**

a) 
$$f(x) = \ln \frac{x^2}{\sqrt{x+3}} = 2 \ln x - \frac{1}{2} \ln(x+3) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2(x+3)} = \frac{4x+12-x}{2x(x+3)} = \frac{3x+12}{2x^2+6x}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = x^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{3}{4} x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4x^{\frac{7}{4}}}$$

b) Calculemos una primitiva de la función:

$$\int (x - e^{-2x}) dx = \int x dx - \int e^{-2x} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} (-2) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} = \frac{x^2 + e^{-2x}}{2}$$

Y por tanto: 
$$\int_0^1 (x - e^{-2x}) dx = \left[ \frac{x^2 + e^{-2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{1 + e^{-2}}{2} - \frac{0 + 1}{2} = \frac{e^{-2}}{2} = \frac{1}{2e^2}$$

4. Estudios realizados han permitido determinar que el nivel medio diario de monóxido de carbono,  $CO_2$ , en el aire en partes por millón (ppm) en una ciudad, está relacionado con la población  $p$  expresada en miles de habitantes por la siguiente expresión  $C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}$ . La evolución del tamaño de población en esta ciudad en  $t$  años se estima que está dado por la relación  $p(t) = 3,1 + 0,1t^2$  en miles de habitantes. ¿Con qué rapidez estará variando la concentración de  $CO_2$  en esta ciudad dentro de 3 años?. (2 puntos)

**SOLUCIÓN.**

El nivel medio diario de  $CO_2$  al cabo de  $t$  años es:  $C(t) = \sqrt{\frac{(3,1 + 0,1t^2)^2}{2} + 17}$ . La velocidad de variación, al cabo de 3 años, será  $C'(3)$ . Tenemos:

$$C'(t) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(3,1+0,1t^2)^2}{2}+17}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(3,1+0,1t^2) \cdot 0,2t = \frac{0,2t(3,1+0,1t^2)}{2\sqrt{\frac{(3,1+0,1t^2)^2}{2}+17}} \Rightarrow C'(3) = \frac{2,4}{10} = 0,24 \text{ ppm}$$

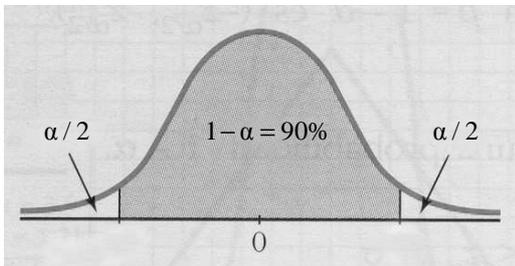
5. La edad a la que obtienen el permiso de conducir los habitantes de una determinada población es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 24 años y desviación típica 4 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 habitantes de dicha población. Sea  $\bar{X}$  la media muestral de la edad de obtención del permiso de conducir.

- a) ¿Cuáles son la media y la varianza de  $\bar{X}$ ? (1 punto)  
b) Halle el intervalo de confianza al 90% para  $\bar{X}$ . (2 puntos)

**SOLUCIÓN.**

a) Por el teorema central del límite, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media  $\mu_{\bar{X}} = \mu = 24$  años y desviación típica  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{10} = 0,4$ . Es decir, la media de las muestras se distribuyen mediante una normal  $N(24; 0,4)$ . La media es entonces de 24 años y como la varianza es el cuadrado de la desviación típica:  $\text{var}(\bar{X}) = 0,4^2 = 0,16$ .

b) Obtengamos el valor crítico correspondiente a una probabilidad del 90%:



$$1 - \alpha = 0,9 \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$$

Observando la tabla:  $z_{\alpha/2} = 1,645$

El intervalo de confianza es:

$$\left( \mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Es decir:  $(24 - 1,645 \cdot 0,4 ; 24 + 1,645 \cdot 0,4) = (23,342 ; 24,658)$