El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

## OPCIÓN A

**1.** Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

**a)** Calcule una matriz X tal que $A^2X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. *(1,25 puntos)*

**b)** Calcule una matriz X tal que $A+XB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. *(1,25 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

**a)** Obtengamos la matriz $A^2$: $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

Tenemos: $A^2X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^2\right)^{-1}A^2X=\left(A^2\right)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow X=\left(A^2\right)^{-1}\cdot I=\left(A^2\right)^{-1}$

Debemos obtener entonces la matriz inversa de $A^2$ que coincidirá con la matriz X:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F1-F2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F2-2F1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{F1-F2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right) \Rightarrow \left(A^2\right)^{-1}=X=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

**b)** Para calcular X como en el apartado anterior, deberemos calcular $B^{-1}$. Pero B no tiene matriz inversa porque sus filas son proporcionales y su rango es 1. Debemos utilizar entonces otro procedimiento.

X, si existe, debe ser una matriz $2\times2$: $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Se verifica:

$$A+XB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+2b & 2a+4b\\ c+2d & 2c+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a+2b=-1\\ 2a+4b=-2\\ c+2d=-1\\ 2c+4d=-2\end{cases}$$

La primera y segunda ecuación son equivalentes y también la tercera y cuarta. Podremos obtener entonces dos de las incógnitas en función de las otras dos: $a=-2b-1$ ; $c=-2d-1$.

Las matrices que verifican la ecuación matricial dada son de la forma: $\begin{pmatrix}-2b-1 & b\\ -2d-1 & d\end{pmatrix}$

**2.** Razonar la existencia de solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} x+3y+z&=6\\ x-2y-z&=5\\ 2x+11y+4z&=10\end{aligned}$$

*(1 punto)*

**SOLUCIÓN.**

Obtengamos los rangos de la matriz de los coeficientes A y de la matriz ampliada B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 6\\ 1 & -2 & -1 & 5\\ 2 & 11 & 4 & 10\end{array}\right)\xrightarrow[F3-2F1]{F2-F1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 6\\ 0 & -5 & -2 & -1\\ 0 & 5 & 2 & -2\end{array}\right)\xrightarrow{F3+F2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 6\\ 0 & -5 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right) \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\mathrm{rg}\,A=2\\ \mathrm{rg}\,B=3\end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{rg}\,A\neq\mathrm{rg}\,B \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ el sistema es incompatible, no tiene solución.

**3.** **a)** Derive las funciones: $f(x)=\ln^2(1+x)$ , $g(x)=\left(\dfrac{x}{\left(x^3-x+1\right)^2}\right)^3$ . *(1 punto)*

**b)** Calcule $\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$ . *(0,5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

**a)** $f'(x)=2\ln(1+x)\cdot\dfrac{1}{1+x}$

$$g'(x)=3\left(\frac{x}{\left(x^3-x+1\right)^2}\right)^2\cdot\frac{\left(x^3-x+1\right)^2-x\cdot 2\left(x^3-x+1\right)\cdot\left(3x^2-1\right)}{\left(x^3-x+1\right)^4}=\frac{3x^2\left(x^3-x+1\right)\left[x^3-x+1-2x\left(3x^2-1\right)\right]}{\left(x^3-x+1\right)^8}=$$

$$=\frac{3x^2\left(-5x^3+x+1\right)}{\left(x^3-x+1\right)^7}$$

**b)** Obtengamos una primitiva de la función: $\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\int\dfrac{1}{x}\,dx-\int x^{-2}\,dx=\ln x-\dfrac{x^{-1}}{-1}=\ln x+\dfrac{1}{x}$

Tenemos entonces: $\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln x+\dfrac{1}{x}\right]_1^2=\left(\ln 2+\dfrac{1}{2}\right)-\left(\ln 1+1\right)=\ln 2+\dfrac{1}{2}-1=\ln 2-\dfrac{1}{2}$

**4.** Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x)=(x-2)^2(x-1)$. Calcule sus intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los de concavidad y convexidad. *(2 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

$f'(x)=2(x-2)(x-1)+(x-2)^2=(x-2)(3x-4)$ ; $f''(x)=(3x-4)+3(x-2)=6x-10$

- Calculemos los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$f'(x)=(x-2)(3x-4)=0 \Rightarrow x=2$ , $x=\dfrac{4}{3}$ (puntos críticos)

$f''(2)=2>0 \Rightarrow$ En $x=2$ la función tiene un mínimo: $(2,0)$

$f''\left(\dfrac{4}{3}\right)=-2<0 \Rightarrow$ En $x=\dfrac{4}{3}$ la función tiene un máximo: $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{27}\right)$

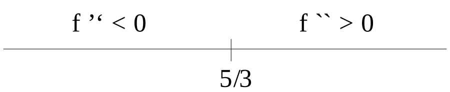
Como la función es continua, los puntos de máximo y de mínimo separan los intervalos de crecimiento y decrecimiento:


Creciente: $\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

Decreciente: $\left(\dfrac{4}{3},2\right)$

- Calculemos los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad:

$f''(x)=6x-10=0 \Rightarrow x=\dfrac{5}{3}$ y como $f'''(x)=6\neq 0 \Rightarrow$ En $x=\dfrac{5}{3}$ la función tiene un punto de inflexión.




Convexa: $\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right)$

Cóncava: $\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$

**5.** Una caja de doce bombones contiene dos de licor. Se eligen cuatro bombones al azar.

**a)** Calcule la probabilidad de no coger ninguno de licor. *(1 punto)*

**b)** Calcule la probabilidad de coger exactamente uno de licor. *(1 punto)*

**c)** Calcule la probabilidad de coger al menos uno de licor. *(1 punto)*

**SOLUCIÓN.**

Sea $L_i$ el suceso "el bombón cogido en i-ésimo lugar es de licor" y $L_i'$ el suceso "el bombón cogido en i-ésimo lugar no es de licor".

**a)** $p(L_1' \cap L_2' \cap L_3' \cap L_4') = p(L_1') \cdot p(L_2'/L_1') \cdot p(L_3'/L_1' \cap L_2') \cdot p(L_4'/L_1' \cap L_2' \cap L_3') = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} =$

$= \frac{56}{132} = \frac{14}{33} \simeq 0,42$

**b)** Se trata de calcular la probabilidad de coger uno de licor y los otros tres no. Hay que tener en cuenta que:

$p(L_1 \cap L_2' \cap L_3' \cap L_4') = \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{132} = \frac{4}{33}$

y como el bombón de licor puede salir también en 2º, 3º o 4º lugar con la misma probabilidad que en primer lugar, la probabilidad de coger uno de licor y tres no es: $4 \cdot \frac{4}{33} = \frac{16}{33} \simeq 0,48$

**c)** El suceso "coger al menos uno de licor" es el contrario del suceso "no coger ninguno de licor" cuya probabilidad hemos obtenido en el apartado a). Por tanto: $p = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33} \simeq 0,58$

## OPCIÓN B

**1.** Una fábrica textil quiere fabricar pantalones y faldas. La fábrica posee dos secciones: sección de corte y sección de confección. Cada pantalón requiere 6 minutos en la sección de corte y 4 en la de confección, mientras que cada falda requiere 4 minutos en la sección de corte y 6 en la de confección. La sección de corte no puede funcionar más de 6 horas al día y la de confección no más de 8 horas al día. Si cada pantalón deja a la empresa un beneficio de 10 € y cada falda de 6 €:

**a)** ¿Cuántos pantalones y cuántas faldas se han de fabricar si se quiere maximizar el beneficio? *(2,5 puntos)*

**b)** Si se pudiera disponer de 1 hora más de funcionamiento en la sección de corte, ¿cuál sería la respuesta al apartado anterior? *(1 punto)*

**SOLUCIÓN.**

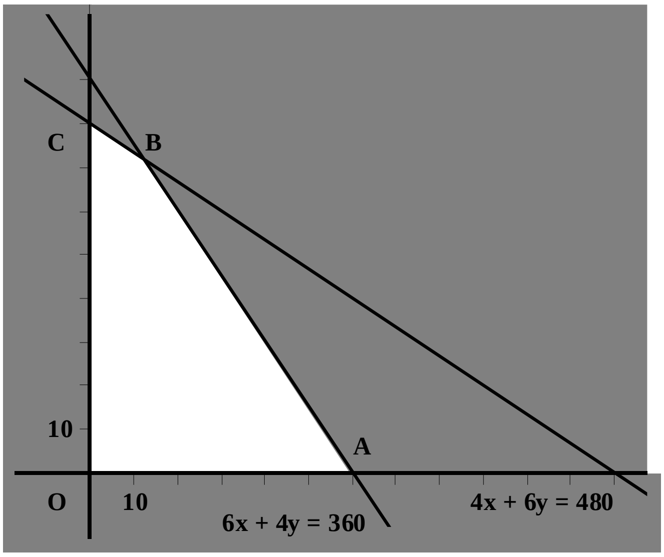
**a)** Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

| | **Nº** | **Corte** | **Confección** | **Beneficio** |
|---|---|---|---|---|
| **pantalones** | x | 6x | 4x | 10x |
| **faldas** | y | 4y | 6y | 6y |
| | $x \geq 0$ $y \geq 0$ | $6x + 4y \leq 360$ | $4x + 6y \leq 480$ | $F(x, y) = 10x + 6y$ |

La función objetivo es la función de beneficios que debe ser máxima: $F(x, y) = 10x + 6y$

Las restricciones a las que debe someterse la solución son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 4y \leq 3600 \\ 4x + 6y \leq 480 \end{cases}$

Estudiemos la solución gráfica al problema:




Las rectas $x = 0$ e $y = 0$ son los ejes de ordenadas y abscisas respectivamente. Los semiplanos soluciones de las inecuaciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$ son el derecho y el superior respectivamente.

La recta $6x + 4y = 360$ pasa por los puntos $(60, 0)$ y $(0, 90)$ por ejemplo. La solución de la inecuación $6x + 4y \leq 360$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La recta $4x + 6y = 480$ pasa por los puntos $(120, 0)$ y $(0, 80)$ por ejemplo. La solución de la inecuación $4x + 6y \leq 480$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La región factible (solución del sistema de restricciones) es el cuadrilátero OABC (en blanco).

La solución que maximiza la función objetivo está en alguno de los vértices de la región factible. Veamos en cuál:

El vértice O es el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y la función objetivo es igual a 0 en él: $F(0, 0) = 0$

En el vértice $A(60, 0) \Rightarrow F(60, 0) = 600$

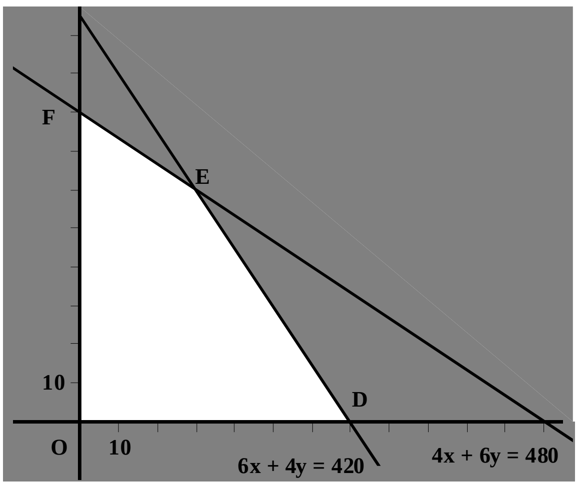
El vértice B es la solución del sistema $\begin{cases} 6x + 4y = 360 \\ 4x + 6y = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 180 \\ 2x + 3y = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 6y = 540 \\ -4x - 6y = -480 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 5x = 60 \quad \Rightarrow \quad x = 12 \ , \ y = 72 \quad \Rightarrow \quad B(12, 72) \quad \Rightarrow \quad F(12, 72) = 552$

En el vértice $C(0, 80) \Rightarrow F(0, 80) = 480$

Por tanto, los beneficios son máximos cuando se fabrican 60 pantalones.

**b)** Ahora la restricción $6x + 4y \leq 360$ se convierte en $6x + 4y \leq 420$. La recta $6x + 4y = 420$ pasa por los puntos $(70, 0)$ y $(10, 90)$ por ejemplo. La solución de la inecuación $6x + 4y \leq 420$ sigue siendo el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas. La región factible es ahora el cuadrilátero ODEF cuyos vértices y el valor de la función objetivo en ellos son:




$O(0, 0) \Rightarrow F(0, 0) = 0$

$D(70, 0) \Rightarrow F(70, 0) = 700$

$\begin{cases} 4x + 6y = 480 \\ 6x + 4y = 420 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 240 \\ 3x + 2y = 210 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 6y = -480 \\ 9x + 6y = 630 \end{cases} \Rightarrow 5x = 150 \Rightarrow x = 30 , y = 60$

$E(30, 60) \Rightarrow F(30, 60) = 660$

$F(0, 80) \Rightarrow F(0, 80) = 480$

Por tanto, la función objetivo se maximiza en D, es decir conviene fabricar 70 pantalones.

**2. a)** Derive las funciones $f(x)=\sqrt{x^3e^{-x}}$ , $g(x)=\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ *(1 punto)*

**b)** Calcule $\int_2^4\left(x^{1/2}+x^2\right)dx$ . *(0,5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

**a)** $$f'(x)=\frac{3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}}{2\sqrt{x^3e^{-x}}}=\frac{x^2e^{-x}(3-x)}{2x\sqrt{x\,e^{-x}}}=\frac{xe^{-x}(3-x)}{2\sqrt{x\,e^{-x}}}=\frac{x(3-x)}{2e^x\sqrt{x\,e^{-x}}}$$

$$g'(x)=5\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^4\left(1+\frac{2}{x^3}\right)$$

**b)** Obtengamos una primitiva de la función $f(x)=x^{1/2}+x^2$ : $\int\left(x^{1/2}+x^2\right)dx=\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{1}{3}x^3=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{1}{3}x^3$

Se tiene entonces: $$\int_2^4\left(x^{1/2}+x^2\right)dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{1}{3}x^3\right]_2^4=\left(\frac{16}{3}+\frac{64}{3}\right)-\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{8}{3}\right)=\frac{72-4\sqrt{2}}{3}=24-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

**3.** Determine el dominio de definición de la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Halle sus intervalos de concavidad y convexidad así como sus puntos de inflexión. *(2 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

- El dominio de $y=\ln x$ es $\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$. El dominio de $f(x)$ es por tanto: $\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$.

- $$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}\quad ;\quad f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x(1+2-2\ln x)}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}=0\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad -3+2\ln x=0\;\Rightarrow\;\ln x=\frac{3}{2}\;\Rightarrow\;x=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}=e\sqrt{e}$$

Se tiene:

| $f''<0$ | $f''>0$ |
|---|---|
| $0$ | $e\sqrt{e}$ |

La función es convexa en $\left(0\,,\,e\sqrt{e}\right)$ y cóncava en $\left(e\sqrt{e}\,,\,+\infty\right)$.

Como la función es continua en su dominio en $x=e\sqrt{e}$ tiene un punto de inflexión.

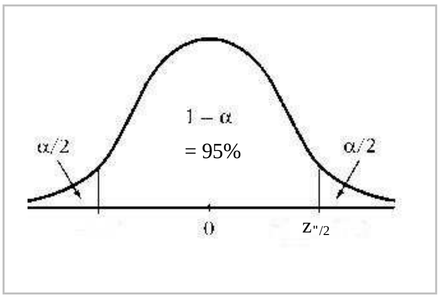
**4.** El tiempo diario de conexión a internet de los alumnos de cierto instituto sigue una distribución normal con desviación típica 15 minutos. Para estimar la media del tiempo de conexión se toma una muestra y se obtiene, con un nivel de confianza del 95%, el intervalo de confianza $(38\text{ min.}\,,\,46\text{ min.})$. Calcular la media y el tamaño de la muestra. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

El intervalo de confianza está centrado en la media. Por tanto, $\overline{X}=42$ minutos .

El radio del intervalo (error máximo admisible) es: $E = 4 = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; 4\sqrt{n} = z_{\alpha/2} \cdot \sigma \;\Rightarrow\; n = \left( \dfrac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{4} \right)^2$

Calculemos, mediante la tabla de la normal, el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%:




$$1 - \alpha = 0,95 \;\Rightarrow\; \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = 0,025 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

En la tabla encontramos: $p\left(z \le z_{\alpha/2}\right) = 0,975 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1,96$

Por tanto: $n = \left( \dfrac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{4} \right)^2 = \left( \dfrac{15 \cdot 1,96}{4} \right)^2 = 54,02 \approx 54$ alumnos