El ejercicio presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir y desarrollar una de ellas, sin mezclar contenidos.

OPCIÓN A

1. Encuentre una matriz X tal que $X\,A = B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

$X\,A = B \;\Rightarrow\; X\,A\,A^{-1} = B\,A^{-1} \;\Rightarrow\; X = B\,A^{-1}$ (*)

Calculemos A^{-1}: $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{F_2-2F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ y sustituyendo en (*):

$$X=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

2. Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calcule B^{-1}. *(1 punto)*
b) Utilizando B^{-1}, calcule X tal que $X\,B = A + B$. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{F_2-F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{F_3+F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \overset{\substack{-F_2\\ F_3/2}}{\approx}$

$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2\end{array}\right) \overset{F_2+F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2\end{array}\right) \overset{F_1-F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2\end{array}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

b) $X\,B = A+B \;\Rightarrow\; X\,B\,B^{-1} = (A+B)\cdot B^{-1} \;\Rightarrow\; X=(A+B)\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 6\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3/2 & 1/2 & 1/2\\ -1 & 3 & 3\\ 3/2 & -1/2 & 7/2\end{pmatrix}$$

3. **a)** Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x) = \ln \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} \qquad g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}} \qquad h(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$$

b) Razone cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de f. ¿Tiene algún punto de inflexión?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)

- $f(x) = \ln \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} = 3\ln x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}x}{x^2+2} = \frac{3}{x} - \frac{x}{x^2+2} = \frac{2x^2+6}{x\left(x^2+2\right)}$

- $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$

- $h'(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} = \frac{x \cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

b)

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ pues $x = 0$ es el único valor real para el que no es calculable el primer sumando y por tanto $\nexists f(0)$

- $f'(x) = \frac{-2x}{x^4} + 2x = \frac{-2}{x^3} + 2x = \frac{-2+2x^4}{x^3} = 0 \Rightarrow -2+2x^4 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (puntos críticos)

  $f''(x) = \frac{8x^6 - \left(-2+2x^4\right)3x^2}{x^6} = \frac{2x^4+6}{x^4}$ y como $f''(-1) > 0$ y $f''(1) > 0 \Rightarrow$ En $x = -1$ y en $x = 1$ la función tiene sendos mínimos relativos: $(-1, 2)$ y $(1, 2)$

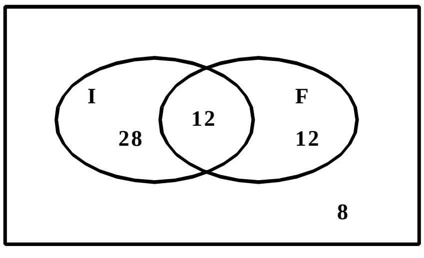
- Como $f''(x) \neq 0 \;\; \forall x$ la función no tiene puntos de inflexión.

4. En un colegio hay 60 alumnos de bachillerato. De ellos 40 estudian inglés, 24 estudian francés y 12 los dos idiomas. Se elige un alumno al azar.

a) Calcule la probabilidad de que estudie al menos un idioma. *(1 punto)*
b) Calcule la probabilidad de que estudie francés sabiendo que también estudia inglés. *(1 punto)*
c) Calcule la probabilidad de que no estudie inglés. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

Sea I el conjunto de los alumnos que estudian inglés y F el de los que estudian francés. El diagrama de la situación es:



a) El suceso "estudiar algún idioma" es el suceso contrario al de "estudiar ningún idioma" y por tanto:

$$p = 1 - \frac{8}{60} = \frac{52}{60} = \frac{13}{15}$$

b) $p\left(F / I\right) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

c) $p\left(I'\right) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

OPCIÓN B

1. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Las del tipo A precisan 1 gr de oro y 1,5 gr de plata, obteniendo un beneficio en la venta de cada una de 40 euros. Para la fabricación de las de tipo B emplea 1,5 gr de oro y 1 gr de plata y obtiene un beneficio en la venta de cada una de 50 euros. El orfebre tiene sólo en el taller 750 gramos de cada uno de los metales. ¿Cuántas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo? *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

Tipo	Número	Oro	Plata	Beneficio
A	x	x	1,5x	40x
B	y	1,5y	y	50y
	$x \geq 0 \quad y \geq 0$	$x + 1,5y \leq 750$	$1,5x + y \leq 750$	$F(x, y) = 40x + 50y$

La función objetivo es la función de beneficios que debe ser máxima: $F(x, y) = 40x + 50y$

Las restricciones a las que debe someterse la solución son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 1,5y \leq 750 \\ 1,5x + y \leq 750 \end{cases}$

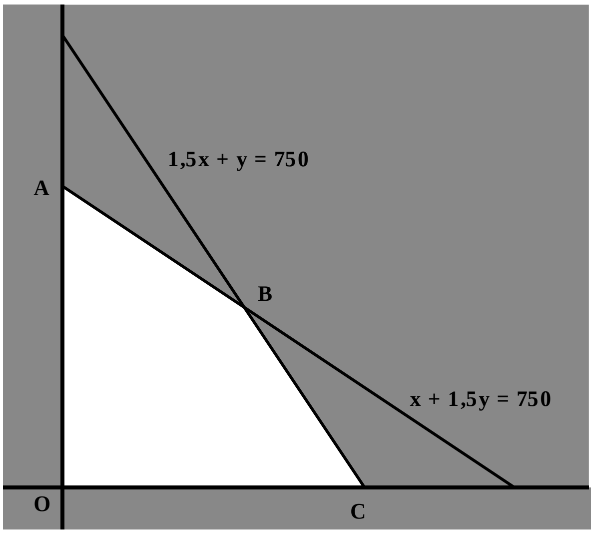
Estudiemos la solución gráfica al problema:

Las rectas $x = 0$ e $y = 0$ son los ejes de ordenadas y abscisas respectivamente. Los semiplanos soluciones de las inecuaciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$ son el derecho y el superior respectivamente.

La recta $x + 1,5y = 750$ pasa por los puntos $(750, 0)$ y $(0, 500)$ por ejemplo. La solución de la inecuación $x + 1,5y \leq 750$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La recta $1,5x + y = 750$ para por los puntos $(500, 0)$ y $(0, 750)$ por ejemplo. La solución de la inecuación $1,5x + y \leq 750$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La región factible (solución del sistema de restricciones) es la región en blanco del plano:



La solución que maximiza la función objetivo está en alguno de los vértices de la región factible. Veamos en cuál:

El vértice O es el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y la función objetivo es igual a 0 en él: $F(0, 0) = 0$

En el vértice $A(500, 0) \quad \Rightarrow \quad F(500, 0) = 20000$

El vértice B es la solución del sistema $\begin{cases} x + 1,5y = 750 \\ 1,5x + y = 750 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,5x + 2,25y = 1125 \\ -1,5x - y = -750 \end{cases} \Leftrightarrow \quad y = 300 \;,\; x = 300$ es decir $B(300, 300) \quad \Rightarrow \quad F(300, 300) = 27000$

En el vértice $C(0, 500) \quad \Rightarrow \quad F(0, 500) = 25000$

Por tanto, los beneficios son máximos cuando se fabrican 300 unidades de cada uno de los dos tipos.

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&4\\5&10\end{pmatrix}$, encuentre una matriz X que resuelva la ecuación $A\,X+B=C$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

La matriz A es (2×1) por lo que la matriz X debe ser (1×2) para que sean multiplicables y su producto sea una matriz (2×2). Sea entonces: $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0 & x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\5&10\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_0 & x_1\\2x_0 & 2x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\5&10\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0+1=2 \;\Rightarrow\; x_0=1 \\ x_1+1=4 \;\Rightarrow\; x_1=3 \\ 2x_0+3=5 \;\Rightarrow\; x_0=1 \\ 2x_1+4=10 \;\Rightarrow\; x_1=3 \end{array}\right.$$

Por tanto: $X=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$

3. **a)** Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x}\right) \qquad g(x)=e^{x^3}\ln\left(x^2+1\right) \qquad h(x)=\ln\left(e^x+\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)$$

b) Considere la función: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & \text{si } -1\le x\le 3\\ \dfrac{2x}{x^2-6} & \text{si } 3<x\le 10\end{cases}$

b1) Estudie la continuidad de f en $x=3$. *(0,75 puntos)*
b2) Calcule la recta tangente a $f(x)$ en $x=4$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) - $f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{x}\right)+x\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}=\ln\left(x+\sqrt{x}\right)+\dfrac{x\left(2\sqrt{x}+1\right)}{2x\sqrt{x}+2x}=\ln\left(x+\sqrt{x}\right)+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+2}$

- $g'(x)=3x^2e^{x^3}\ln\left(x^2+1\right)+e^{x^3}\dfrac{2x}{x^2+1}=xe^{x^3}\left[3x\ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{2}{x^2+1}\right]$

- $h'(x)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}}\cdot\left(e^x+\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}}\cdot\dfrac{x-x+1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}}\cdot\left(e^x+\dfrac{1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}}\right)$

b1) - $\exists\, f(3)=2$

- $\exists \lim\limits_{x\to3} f(x)$: $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x+1}=2\\ \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x}{x^2-6}=2\end{array}\right. \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to3} f(x)=2$

- Por tanto: $f(3)=\lim\limits_{x\to3} f(x) \Rightarrow$ la función es continua en $x=3$

b2) Para $x=4$, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-6} \Rightarrow f(4)=\dfrac{4}{5} \Rightarrow$ punto de tangencia: $\left(4,\dfrac{4}{5}\right)$

La pendiente de la recta tangente es: $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-6\right)-4x^2}{\left(x^2-6\right)^2}=\dfrac{-2x^2-12}{\left(x^2-6\right)^2} \Rightarrow m=f'(4)=-\dfrac{44}{100}=-\dfrac{11}{25}$

Y su ecuación: $y-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{11}{25}(x-4) \Leftrightarrow 25y-20=-11x+44 \Leftrightarrow 11x+25y-64=0$

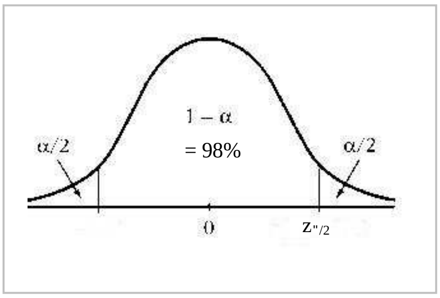
4. La temperatura durante los meses de verano en una ciudad sigue una distribución normal con una desviación típica de 5º. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98%, se obtiene el intervalo $(25º\,,30º)$. Calcule la media y el tamaño de la muestra elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

El intervalo de confianza está centrado en la media. Por tanto, $\overline{X} = 27,5º$.

El radio del intervalo (error máximo admisible) es: $E = 2,5 = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; 2,5\sqrt{n} = z_{\alpha/2} \cdot \sigma \;\Rightarrow\; n = \left(\dfrac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{2,5}\right)^2$

Calculemos, mediante la tabla de la normal, el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%:



$$1-\alpha = 0,98 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0,98 = 0,02 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = 0,01 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2} = 0,99$$

En la tabla encontramos: $p\left(z \le z_{\alpha/2}\right) = 0,99 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2,33$

Por tanto: $n = \left(\dfrac{\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{2,5}\right)^2 = \left(\dfrac{5 \cdot 2,33}{2,5}\right)^2 = 21,7$

La muestra contiene 22 datos.