JUNIO 2009

Desarrolle clara y razonadamente tres cuestiones, eligiendo una del par $(A1, A2)$, otra de $(B1, B2)$ y otra de $(C1, C2)$.

<u>CUESTIÓN A1</u>:

Sea $T = \{ (x, y) \mid x + 3y \le 9,\ 2x + y \le 8,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \}$

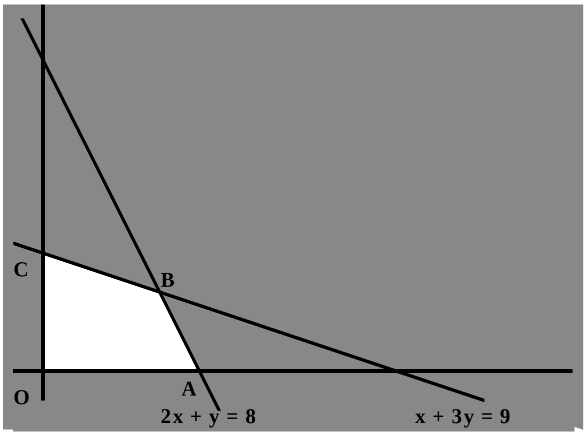
a) Represente gráficamente el conjunto T. *[1 punto]*

b) Consideramos la función $f(x, y) = 3x + 3y$. Calcular, si existen, los puntos del conjunto T que dan el valor máximo y el valor mínimo de la función. *[1,75 puntos]*

c) ¿Cuál sería la respuesta al apartado anterior si eliminamos en el conjunto T la restricción $y \ge 0$? *[0,75 puntos]*

SOLUCIÓN.

a) - La recta $x + 3y = 9$ pasa por los puntos $(9, 0)$ y $(0, 3)$. El semiplano solución de la inecuación es el que contiene al origen de coordenadas.



- La recta $2x + y = 8$ pasa por los puntos $(4, 0)$ y $(0, 8)$. El semiplano solución de la inecuación es el que contiene al origen de coordenadas.

- La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas. La solución de la inecuación $x \ge 0$ es el semiplano de la derecha.

- La recta $y = 0$ es el eje de abscisas. La solución de la inecuación $y \ge 0$ es el semiplano superior.

El conjunto T es el cuadrilátero OABC (en blanco).

b) La función objetivo se maximiza o minimiza en los vértices de T.

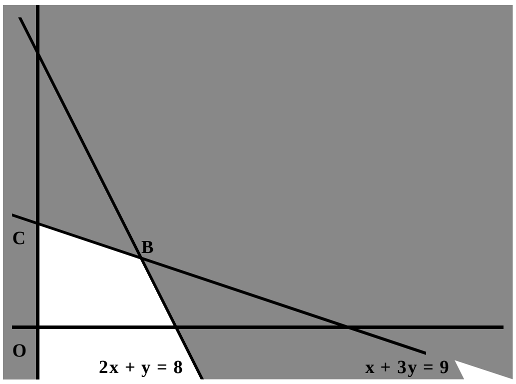
- $O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$
- $A(4, 0) \Rightarrow f(4, 0) = 12$
- $B(3, 2) \Rightarrow f(3, 2) = 15$

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow y = 8 - 2x \Rightarrow x + 24 - 6x = 9 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3,\ y = 2 \Rightarrow B(3, 2)$$

- $C(0, 3) \Rightarrow f(0, 3) = 9$

Luego la función $f(x, y)$ es máxima en $B(3, 2)$ y es mínima en $O(0, 0)$.

c) Si eliminamos la restricción $y \ge 0$, el conjunto T es ahora una región abierta que seguirá alcanzando su máximo en el vértice $B(3, 2)$ pero no alcanzará un mínimo.



CUESTIÓN A2:
Una tienda posee tres tipos de conservas A, B, C. El precio medio de las tres conservas es de 1 €. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, pagando por ello 60 €. Otro compra 20 unidades de A y 25 de C y paga por ello 45 €.
a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular el precio de cada una de las conservas y resuélvalo por el método de Gauss. *[2,5 puntos]*
b) ¿Es posible determinar el precio de cada una de las conservas si cambiamos la tercera condición por *"otro cliente compra 20 unidades de A y 10 de B, pagando por ello 30 €"*? *[1 punto]*

SOLUCIÓN.

a) Sea *x* el precio unitario de A, *y* el de B y *z* el de C. Se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3}=1 \\ 30x+20y+10z=60 \\ 20x+25z=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 3x+2y+z=6 \\ 4x \quad +5z=9 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-2z=-3 \\ -4y+z=-3 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=3 \\ y+2z=3 \\ 9z=9 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad z=1 \ , \ y=1 \ , \ x=1$ Transformaciones elementales utilizadas: (1) F_2-3F_1 ; F_3-4F_1
(2) F_3-4F_2

b) El sistema será ahora: $\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3}=1 \\ 30x+20y+10z=60 \\ 20x+10y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 3x+2y+z=6 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-2z=-3 \\ -y-2z=-3 \end{cases}$ que es un sistema compatible indeterminado por lo que no será posible determinar el precio de cada conserva.

CUESTIÓN B1:
a) Derive las funciones $f(x)=4\sqrt{x}-\ln x^2$, $g(x)=(x-1)e^{x^2}$, $h(x)=\dfrac{x^6}{3-x^3}$ *[1,5 puntos]*
b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los valores de x, si existen, para los que la función $f(x)$ del apartado anterior, alcanza máximo o mínimo relativo. *[2 puntos]*

SOLUCIÓN.

a) • $f'(x)=\dfrac{4}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}-2}{x}$

• $g'(x)=e^{x^2}+(x-1)e^{x^2}\cdot 2x=e^{x^2}\left(1+2x^2-2x\right)$

• $h'(x)=\dfrac{6x^5\left(3-x^3\right)-x^6\left(-3x^2\right)}{\left(3-x^3\right)^2}=\dfrac{18x^5-6x^8+3x^8}{\left(3-x^3\right)^2}=\dfrac{18x^5-3x^8}{\left(3-x^3\right)^2}=\dfrac{3x^5\left(6-x^3\right)}{\left(3-x^3\right)^2}$

b) La función es la diferencia de dos funciones: $f_1(x)=4\sqrt{x}$ cuyo dominio es $[0,\infty)$ y $f_2(x)=\ln x^2$ cuyo dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$. El dominio de $f(x)$ es la intersección de ambos dominios y por tanto $D(f)=(0,\infty)$

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x}-2}{x}=0 \ \Rightarrow \ 2\sqrt{x}-2=0 \ \Rightarrow \ \sqrt{x}=1 \ \Rightarrow \ x=1 \quad \text{(valor crítico)}$$

$$f''(x)=\frac{2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x-\left(2\sqrt{x}-2\right)}{x^2}=\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+2}{x^2} \ \Rightarrow \ f''(1)>0 \ \Rightarrow \ x=1 \text{ es un mínimo relativo}$$

CUESTIÓN B2:

a) Derive las funciones $f(x) = \ln\sqrt{x}$, $g(x) = x^2\left(5 - x^3\right)$, $h(x) = 3^{5x-1}$ *[1,5 puntos]*

b) La demanda de un bien conocido su precio, p, viene dada por $D(p) = \begin{cases} 40p - p^2 & \text{si } 20 \le p \le 30 \\ 600 - 10p & \text{si } 30 < p \le 40 \end{cases}$.

Represéntela. A la vista de su gráfica diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima demanda y para cuáles la demanda es mayor que 375 unidades. *[2 puntos]*

SOLUCIÓN.

a) C $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}$

C $g(x) = 5x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 10x - 5x^4$

C $h'(x) = 3^{5x-1} \cdot 5 \cdot \ln 3$

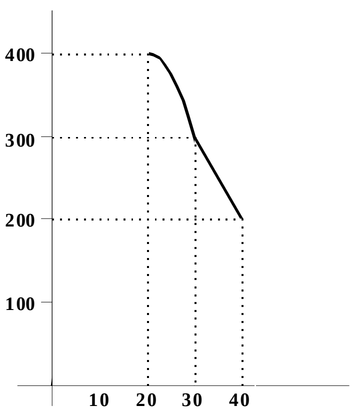
b) C La función $D(p) = 40p - p^2$ definida en $[20, 30]$ es una parábola que corta al eje de abscisas en los puntos:

$$40p - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p(40 - p) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0 \ , \ p = 40 \quad \Rightarrow \quad (0\,,0) \ \text{y} \ (40\,,0)$$

Su vértice está en: $D'(p) = 40 - 2p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 20 \quad \Rightarrow \quad (20\,,400)$ y como $D''(p) = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ se trata de un máximo.

C La función $D(p) = 600 - 10p$ definida en $(30\,,40]$ es una recta que pasa por los puntos $(30\,,300)$ y $(40\,,200)$.

C Considerando los intervalos en que están definidas cada una de las funciones, la gráfica es:



A la vista de la gráfica, la máxima demanda se tiene para un precio de 20 unidades monetarias y la mínima demanda para 40 unidades monetarias.

Veamos el precio para el que la demanda es de al menos 375 unidades:

$$375 = 40p - p^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 - 40p + 375 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1500}}{2} = \frac{40 \pm 10}{2} = \begin{cases} 25 \\ 15 \end{cases}$$

Puesto que $p = 15$ está fuera del intervalo en que está definida la función, el valor útil es $p = 25$ y, por tanto, la demanda se mantiene por encima de 375 unidades para un precio $p \in (20\,,25)$.

CUESTIÓN C1:
Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 4 bolas verdes. Se extraen al azar 3 bolas sin reposición.
a) Calcule la probabilidad de que salgan todas las bolas del mismo color. *[1 punto]*
b) Calcule la probabilidad de que salgan más bolas blancas o verdes. *[1 punto]*
c) Calcule la probabilidad de que dos bolas sean blancas y una verde. *[1 punto]*

SOLUCIÓN.

a) $p\left[(B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (V_1 \cap V_2 \cap V_3)\right] =$

$$= p(B_1) \cdot p(B_2 / B_1) \cdot p(B_3 / B_1 \cap B_2) + p(N_1) \cdot p(N_2 / N_1) \cdot p(N_3 / N_1 \cap N_2) + p(V_1) \cdot p(V_2 / V_1) \cdot p(V_3 / V_1 \cap V_2) =$$

$$= \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} + \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{4}{18} + \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{2}{18} = \frac{720 + 120 + 24}{6840} = \frac{864}{6840} = 0{,}1263$$

b) Sea H el suceso “sacar una bola blanca o verde, cuya probabilidad es $p(H) = \frac{14}{20}$. Se tiene:

$$p = p(H_1 \cap H_2 \cap H_3) + p(H_1 \cap H_2 \cap N_3) + p(H_1 \cap N_2 \cap H_3) + p(N_1 \cap H_2 \cap H_3) =$$

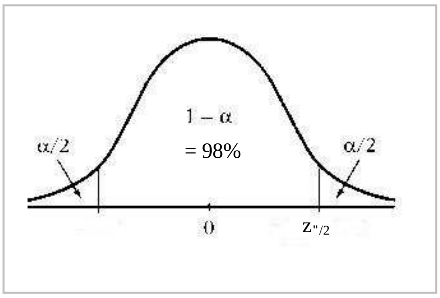
$$= \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} \cdot \frac{12}{18} + \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} \cdot \frac{6}{18} + \frac{14}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{13}{18} + \frac{6}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} = \frac{2184}{6840} + 3 \cdot \frac{1092}{6840} = \frac{5460}{6840} = 0{,}7982$$

c) $p[2B \cap 1V] = p(B_1 \cap B_2 \cap V_3) + p(B_1 \cap V_2 \cap B_3) + p(V_1 \cap B_2 \cap B_3) =$

$$= \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{4}{18} + \frac{10}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{9}{18} + \frac{4}{20} \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 4}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1080}{6840} = 0{,}1579$$

CUESTIÓN C2:
El peso medio de 700 adultos de una determinada población es de 80 kg. Determine el intervalo, con un nivel de confianza del 98%, en el que estará la media si la desviación típica es igual a 15. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *[3 puntos]*

SOLUCIÓN.



El radio del intervalo de confianza de la media es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%, $\sigma = 15$ es la desviación típica poblacional y $n = 700$ es el número de individuos de la muestra.

Obtengamos a partir de la tabla, el valor de $z_{\alpha/2}$:

$$1 - \alpha = 0{,}98 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}99$$

En la tabla encontramos: $p\left(z \le z_{\alpha/2}\right) = 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2{,}33$

Por tanto $E = 2{,}33 \cdot \frac{15}{\sqrt{700}} = 1{,}32$ y el intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\overline{x} - E \,,\, \overline{x} + E\right) = \left(80 - 1.32 \,,\, 80 + 1.32\right) = \left(78.68 \,,\, 81.32\right)$$