Desarrolle clara y razonadamente tres cuestiones, eligiendo una del par (A1,A2), otra de (B1,B2) y otra de (C1,C2).

<u>Cuestión A1</u>:

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&2\\4&1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&4&1\\3&1&1\end{pmatrix}$.

Calcular la matriz $\left(A^2\right)^{-1}$. Resolver la ecuación $AX+B=C$. *(2 puntos)*

b) Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema lineal: $\begin{cases}x-9y+5z=33\\x+3y-z=-9\\x-y+z=5\end{cases}$ *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) C Calculemos la matriz A^2: $A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

y ahora su inversa: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&-1&0\\1&2&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&-1&0\\0&3&-1&-1&2&0\\0&1&0&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-2F_3}$

$\xrightarrow{F_2-2F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&-1&0\\0&1&-1&1&0&-2\\0&1&0&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-2\\0&1&-1&1&0&-2\\0&1&0&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-2\\0&1&-1&1&0&-2\\0&-3&1&-2&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{F_2+F_3}$

$\xrightarrow{F_2+F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-2\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&-2&1&3\end{array}\right)\Rightarrow\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&1\\-2&1&3\end{pmatrix}$

C $AX+B=C\;\Rightarrow\;AX=C-B\;\Rightarrow\;A^{-1}AX=A^{-1}(C-B)\;\Rightarrow\;X=A^{-1}(C-B)$

Calculemos A^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_3}$

$\xrightarrow{F_2-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0&-1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&-1&0&0&0&-1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\cdot(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

Por tanto: $X=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&2&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\0&1&-3\end{pmatrix}$

b) $\begin{cases}x-9y+5z=33\\x+3y-z=-9\\x-y+z=5\end{cases}\overset{\substack{E_2-E_1\\E_3-E_1}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x-9y+5z=33\\12y-6z=-42\\8y-4z=-28\end{cases}\overset{\substack{E_2:6\\E_3:4}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x-9y+5z=33\\2y-z=-7\\2y-z=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-9y+5z=33\\2y-z=-7\end{cases}\Rightarrow z=\lambda:$

$$y=\frac{-7+\lambda}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-63+9\lambda}{2}+33-5\lambda=\frac{-63+9\lambda+66-10\lambda}{2}=\frac{3-\lambda}{2}$$

Luego se trata de un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones son: $x=\frac{3-\lambda}{2}$; $y=\frac{-7+\lambda}{2}$; $z=\lambda$

<u>Cuestión A2</u>:

El señor Álvarez deja su fortuna a sus tres hijos en herencia con las siguientes condiciones:

1. El mayor recibe la media aritmética de los que reciben los otros dos más 30.000 €.
2. El mediano recibe 10.000 € más que la diferencia entre lo que recibe el mayor y lo que recibe el pequeño.
3. El pequeño recibirá la media aritmética de lo que reciben los otros dos menos 30.000 €.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular qué cantidad recibe cada uno de los hijos del señor Álvarez. Resuélvalo por el método de Gauss. *(2 puntos)*

b) ¿Es posible saber qué cantidad recibe cada uno de los hijos del señor Álvarez si sustituimos la condición 2 por: "al mediano le deja la media aritmética de lo que reciben los otros dos"? *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sea x la cantidad que recibe el mayor, y la que recibe el mediano, z la que recibe el pequeño. Se tiene:

$$\begin{cases} x=\frac{y+z}{2}+30000 \\ y=x-z+10000 \\ z=\frac{x+y}{2}-30000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=60000 \\ x-y-z=-10000 \\ x+y-2z=60000 \end{cases} \overset{\text{cambio de orden}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-2z=60000 \\ 2x-y-z=60000 \\ x-y-z=-10000 \end{cases} \overset{\substack{E_2-2E_1 \\ E_3-E_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-2z=60000 \\ -3y+3z=-60000 \\ -2y+z=-70000 \end{cases} \overset{E_2:(-3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{E_2:(-3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-2z=60000 \\ y-z=20000 \\ -2y+z=-70000 \end{cases} \overset{E_3+2E_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-2z=60000 \\ y-z=20000 \\ -z=-30000 \end{cases} \Rightarrow \quad z=30000 \ , \ y=50000 \ , \ x=70000$$

Por tanto, el mayor recibe 70.000 €, el mediano 50.000 € y el pequeño 30.000 €.

b) En la nueva situación:

$$\begin{cases} 2x-y-z=60000 \\ y=\frac{x+z}{2} \\ x+y-2z=60000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=60000 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=60000 \end{cases} \overset{\text{cambio de orden}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=60000 \\ 2x-y-z=60000 \end{cases} \overset{\substack{E_2-E_1 \\ E_3-2E_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-3z=60000 \\ 3y-3z=60000 \end{cases}$$

Tenemos un sistema compatible indeterminado que no nos permite obtener una única solución para el problema.

<u>Cuestión B1</u>:

a) Derive las funciones $f(x)=\frac{x^2+4}{x-2}$ y $g(x)=(x-5)^2\ln x$ *(1 punto)*

b) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+1} & \text{si } x\in(-2\,,2) \\ \frac{x+2}{x-1} & \text{si } x\in[2\,,4] \end{cases}$

b1) Razonar si f es continua en $x=2$ y en $x=4$. *(1,25 puntos)*

b2) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para los valores $x\in(-2\,,2)$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $$f'(x)=\frac{2x(x-2)-(x^2+4)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2-4}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2}$$

$$g'(x)=2(x-5)\ln x+(x-5)^2\frac{1}{x}=(x-5)\left(2\ln x+\frac{x-5}{x}\right)$$

b1) C Estudiemos la continuidad en $x = 2$:

$$\exists f(2) = \frac{2+2}{2-1} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{5} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = 4 \end{array}\right| \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow \text{ no existe } \lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es discontinua}$$

en $x = 2$ con una discontinuidad no evitable.

C Estudiemos la continuidad en $x = 4$:

$$\exists f(4) = \frac{4+2}{4-1} = 2 \qquad ; \qquad \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{x+2}{x-1} = 2$$

y como $f(4) = \lim\limits_{x\to 4} f(x) \Rightarrow$ la función es continua en $x = 4$ aunque sólo por la izquierda.

b2) Se trata de estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Se tiene:

	f ´ < 0		**f ´ > 0**	
! 2		0		2

luego: $f(x)$ es decreciente en $(-2, 0)$ y creciente en $(0, 2)$.

Cuestión B2

a) Derive las funciones $f(x) = (1-x)^3 e^x$, $g(x) = x + 8x^2 + \dfrac{1}{x}$, $h(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{x-2}$ *(1,5 puntos)*

b) Razone a qué es igual el dominio de la función $g(x)$ del apartado anterior y calcule sus intervalos de concavidad y convexidad, así como sus puntos de inflexión. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = 3(1-x)^2(-1)e^x + (1-x)^3 e^x = (1-x)^2 e^x (-3+1-x) = (1-x)^2(-2-x)e^x$

$$g'(x) = 1 + 16x - \frac{1}{x^2}$$

$$h'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = -\frac{3}{x^2} - \frac{2}{(x-2)^2}$$

b) C La función $g(x)$ es la suma de una función polinómica cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y de una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$. Por tanto su dominio es la intersección de ambos dominios, es decir: $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

C Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de $g''(x)$:

$$g'(x) = 1 + 16x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow g''(x) = 16 - \frac{-2x}{x^4} = 16 + \frac{2}{x^3} = \frac{16x^3+2}{x^3} = 0 \Rightarrow 16x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x^3 = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Se tiene:

g'' > 0	g'' < 0	g'' > 0
	! 1/2	0

Es decir: $\left(-\infty\,,-\dfrac{1}{2}\right) \to$ cóncava , $\left(-\dfrac{1}{2}\,,0\right) \to$ convexa , $\left(0\,,+\infty\right) \to$ cóncava .

De los dos puntos donde cambia la curvatura, sólo $x=-\dfrac{1}{2}$ es un punto de inflexión pues $x=0$ no pertenece al dominio de la función.

Cuestión C1:

A partir de 5 matemáticos y 7 físicos hay que construir una comisión formada por 4 miembros elegidos al azar.

a) Calcule la probabilidad de que todos los miembros sean matemáticos. *(1 punto)*

b) Calcule la probabilidad de que la comisión acabe formada por 2 físicos y 2 matemáticos. *(1 punto)*

c) Calcule la probabilidad de que no haya ningún matemático. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

Sea M el suceso "un miembro de la comisión es matemático" y sea F el suceso "un miembro de la comisión es físico".

a)

$$p\left(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4\right) = p\left(M_1\right)\cdot p\left(M_2 / M_1\right)\cdot p\left(M_3 / M_1 \cap M_2\right)\cdot p\left(M_4 / M_1 \cap M_2 \cap M_3\right) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{99} \simeq 0{,}01$$

b)

$$p\left(M_1 \cap M_2 \cap F_3 \cap F_4\right) + p\left(M_1 \cap F_2 \cap M_3 \cap F_4\right) + p\left(M_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap M_4\right) + p\left(F_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap F_4\right) + p\left(F_1 \cap M_2 \cap F_3 \cap M_4\right) +$$
$$p\left(F_1 \cap F_2 \cap M_3 \cap M_4\right) = 6\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{14}{33} \simeq 0{,}42$$

c) $p\left(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4\right) = \dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{6}{11}\cdot\dfrac{5}{10}\cdot\dfrac{4}{9} = \dfrac{7}{99} \simeq 0{,}07$

Cuestión C2

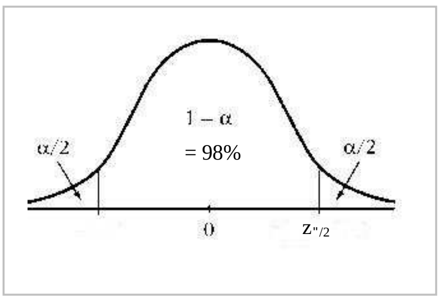
La cantidad de hemoglobina en sangre del ser humano sigue una ley normal con una desviación típica de 2 g/dl. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98% se obtiene el intervalo $\left(13\,,15\right)$ para la cantidad media de hemoglobina en sangre. Calcule la media y el tamaño de la muestra poblacional elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

El intervalo de confianza está centrado en la media. Por tanto, $\overline{X} = 14$ g/dl .

El radio del intervalo (error máximo admisible) es: $E = 1 = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\cdot\sigma\right)^2 = \left(2\cdot z_{\alpha/2}\right)^2$

Calculemos, mediante la tabla de la normal, el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%:



$1-\alpha = 0{,}98 \Rightarrow \alpha = 1-0{,}98 = 0{,}02 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}01 \Rightarrow 1-\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}99$

En la tabla encontramos: $p\left(z \le z_{\alpha/2}\right) = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

Por tanto: $n = \left(2\cdot 2{,}33\right)^2 = 4{,}66^2 = 21{,}7 \Rightarrow$ debe haberse elegido una muestra de 22 personas.