JUNIO 2008

<u>CUESTIÓN A1</u>: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A \cdot B$ *(0,75 puntos)*

b) Calcule la matriz inversa de B y utilícela para resolver la ecuación $X \cdot B = B + A$ *(2,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{(3)}{\approx}$$

$$\overset{(3)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \overset{(4)}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_1 - F_3$ (2) $F_2 - 3F_1$; $F_3 - F_1$ (3) $F_2 : (-2)$; $F_3 : 3$ (4) $F_1 + 2F_3$; $F_2 + 3F_3$

$$X \cdot B = B + A \Rightarrow X = (B + A) \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} + A \cdot B^{-1} = I + A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>CUESTIÓN A2</u>: Un agricultor desea plantar 750 cerezos, 700 perales y 650 manzanos. En el vivero Agro ofrecen un lote de 15 cerezos, 30 perales y 10 manzanos por 700 euros y en el vivero Ceres el lote de 15 cerezos, 10 perales y 20 manzanos cuesta 650 euros.

a) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el número de lotes que ha de comprar en cada vivero para que pueda plantar los árboles que desea y para que el coste total de adquisición sea mínimo. *(3 puntos)*

b) ¿Utiliza el agricultor todos los árboles que ha adquirido?, en caso negativo diga cuántos no ha plantado y de qué tipo son. *(0,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Aunque en el enunciado no se explicita, debemos entender que el número de árboles de cada clase es el **mínimo** que el agricultor desea plantar.

Organicemos los datos del problema en una tabla:

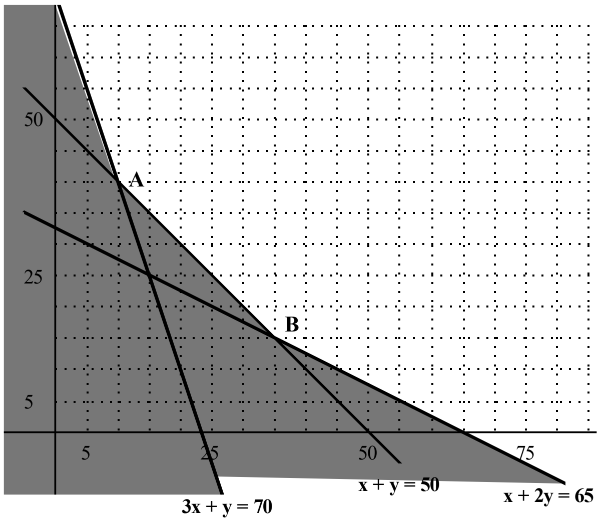
	nº de lotes	**nº cerezos**	**nº perales**	**nº manzanos**	**Precio**
AGRO	x	15x	30x	10x	700x
CERES	y	15y	10y	20y	650y
	≥ 0	≥ 750	≥ 700	≥ 650	$F(x, y)$

a) La función objetivo, que en este caso debe ser mínima, es: $F(x\,,\,y) = 700x + 650y$

Las restricciones a que deben someterse la solución del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 15x + 15y \geq 750 \\ 30x + 10y \geq 700 \\ 10x + 20y \geq 650 \end{cases}$$

Dibujemos la región factible:



X La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas y el semiplano solución de $x \geq 0$ es el de la derecha.

X La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y el semiplano solución de $y \geq 0$ es el superior.

X La recta $15x + 15y = 750 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 50$ pasa por los puntos $(50\,,\,0)$ y $(0\,,\,50)$. La solución de la inecuación $15x + 15y \geq 750$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

X La recta $30x + 10y = 700 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + y = 70$ pasa por los puntos $(10\,,\,40)$ y $(20\,,\,10)$. La solución de la inecuación $30x + 10y \geq 700$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

X La recta $10x + 20y = 650 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y = 65$ pasa por los puntos $(65\,,\,0)$ y $(5\,,\,30)$. La solución de la inecuación $10x + 20y \geq 650$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

Por tanto, la región factible es una región abierta con dos vértices: A y B. Obtengamos sus coordenadas:

Vértice A: $\begin{cases} x + y = 50 \\ 3x + y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -50 \\ 3x + y = 70 \end{cases} \Rightarrow \; 2x = 20 \;\Rightarrow\; x = 10\,,\; y = 40 \;\Rightarrow\; A(10\,,\,40)$

Vértice B: $\begin{cases} x + y = 50 \\ x + 2y = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -50 \\ x + 2y = 65 \end{cases} \Rightarrow \; y = 15\,,\; x = 35 \;\Rightarrow\; B(35\,,\,15)$

Veamos en cuál de los vértices de la región factible es mínima la función objetivo:

$$\begin{matrix} F(10\,,\,40) = 700 \cdot 10 + 650 \cdot 40 = 33000 \\ F(35\,,\,15) = 700 \cdot 35 + 650 \cdot 15 = 34250 \end{matrix} \Rightarrow$$ El precio es mínimo con 10 lotes de Agro y 40 de Ceres.

b) El número de cerezos comprados es: $15 \cdot 10 + 15 \cdot 40 = 750$ luego utiliza todos.
El número de perales comprados es: $30 \cdot 10 + 10 \cdot 40 = 700$ luego también utiliza todos los perales comprados.
El número de manzanos comprados es: $10 \cdot 10 + 20 \cdot 40 = 900$ luego deja de utilizar 250 manzanos.

<u>CUESTIÓN B1</u>: a) Derive las funciones $f(x) = x^2 \cdot \ln(1-x)$, $g(x) = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{8}{x^2}$, $h(x) = 2^{2x-1}$ *(1,5 puntos)*

b) La velocidad (en metros/minuto) de un juguete viene dada por $V(t) = \begin{cases} 10t - t^2 & \text{si } t \in [0,2] \cup [8,10] \\ 16 & \text{si } t \in (2\,,\,8) \end{cases}$, siendo la variable t el número de minutos transcurrido desde que se pone en marcha.

b_1) Represente la función velocidad. *(0,75 puntos)*

b_2) A la vista de la gráfica, diga cuál es la velocidad máxima y en qué momento o momentos se alcanza. *(0,5 puntos)*

b_3) Calcule la velocidad del juguete pasados 30 segundos desde su puesta en marcha. ¿Hay algún otro momento en el que lleva la misma velocidad?, en caso afirmativo, diga en cuál. *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = 2x \cdot \ln(1-x) + x^2 \cdot \dfrac{1}{1-x} \cdot (-1) = 2x \cdot \ln(1-x) - \dfrac{x^2}{1-x}$

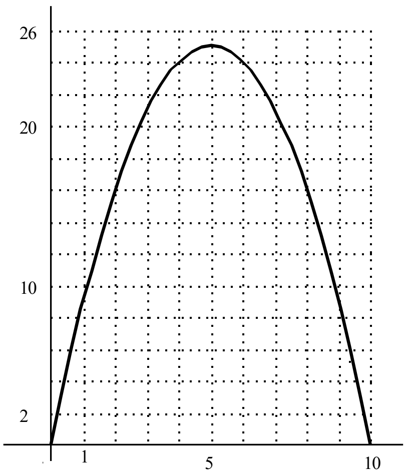
$g(x) = \dfrac{1}{8}x^2 - 8x^{-2} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \dfrac{1}{4}x + 16x^{-3} = \dfrac{x}{4} + \dfrac{16}{x^3}$

$h'(x) = 2^{2x-1} \cdot 2 \cdot \ln 2$

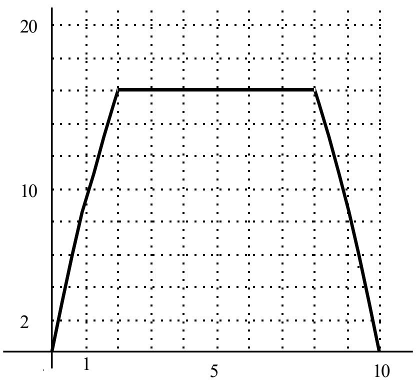
b) La función tiempo – velocidad es una función definida a trozos formada por una parábola y una función constante.

b_1) Representemos la función $V(t) = 10t - t^2$ en los intervalos en que está definida.

$V'(t) = 10 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 5$ y como $V''(t) = -2 \quad \Rightarrow$ En $t = 5$ la función tiene un máximo en $(5, 25)$.
Como además pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(10, 0)$, la gráfica es:



Considerando la parábola en los intervalos $[0, 2]$ y $[8, 10]$ y la función constante $V(t) = 16$ en $(2, 8)$:



b_2) La velocidad máxima es de 16 m/min y se alcanza entre los minutos 2 y 8.

b_3) A los 30 segundos, $t = 0,5$ min $\Rightarrow$ $V(0,5) = 10 \cdot 0,5 - (0,5)^2 = 4,75$ m/min.
Dada la simetría de la parábola, volverá a tener la misma velocidad a los 9 min. 30 seg.

<u>CUESTIÓN B2</u>: a) Derive las funciones $f(x) = 7x - x^2 + \dfrac{9}{x}$, $g(x) = (1-x)^2 \cdot e^x$, $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)^{20}}$

(1,5 puntos)

b) Razone a qué es igual el dominio de la función $f(x)$ del apartado anterior, y diga los puntos en los que alcanza máximo o mínimo relativo. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = 7 - 2x - \dfrac{9}{x^2}$

$g'(x) = 2(1-x)(-1) \cdot e^x + (1-x)^2 \cdot e^x = (1-x) \cdot e^x \cdot (-2 + 1 - x) = (1-x) \cdot e^x \cdot (-1-x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$

$h(x) = (x+1)^{-20} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = -20 \cdot (x+1)^{-21} = -\dfrac{20}{(x+1)^{21}}$

b) El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}-\{0\}$ porque para $x=0$ no es calculable el sumando $\frac{9}{x}$ y por tanto no existe $f(0)$.

Calculemos los puntos de máximo o de mínimo de la función $f(x)$:

$f'(x)=7-2x-\frac{9}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; 7x^2-2x^3-9=0 \;\Leftrightarrow\; 2x^3-7x^2+9=0$.

Busquemos la primera raíz por la regla de Ruffini:

	2	−7	0	9
−1		−2	9	−9
	2	−9	9	$\boxed{0}$

luego $x=-1$ es una primera solución de la ecuación $f'(x)=0$. Otras posibles soluciones son:

$$2x^2-9x+9=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{4}=\frac{9\pm 3}{4}= \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Tenemos entonces tres puntos críticos. Comprobemos si se trata de máximos o de mínimos:

$$f''(x)=-2-\frac{-9\cdot 2x}{x^4}=-2+\frac{18}{x^3}$$

$f''(-1)=-2-18<0 \;\Rightarrow\;$ En $x=-1$ la función tiene un máximo relativo.

$f''(3)=-2+\frac{18}{27}<0 \;\Rightarrow\;$ En $x=3$ la función tiene un máximo relativo.

$f''\left(\frac{3}{2}\right)=-2+\frac{18}{\frac{27}{8}}=-2+\frac{144}{27}>0 \;\Rightarrow\;$ En $x=\frac{3}{2}$ tiene un mínimo relativo.

CUESTIÓN C1: Se tienen dos urnas A y B. En la primera hay 2 bolas blancas, 3 negras y 1 roja y en la segunda hay 3 bolas blancas, 1 negra y 1 verde.

a) Se extrae una bola de cada urna, calcule la probabilidad de que ambas sean del mismo color. *(1,5 puntos)*

b) Se lanza una moneda, si se obtiene cara se extraen dos bolas de la urna A y si se obtiene cruz se extraen dos bolas de la urna B, calcule la probabilidad de que ambas bolas sean blancas. *(1,5 puntos)*

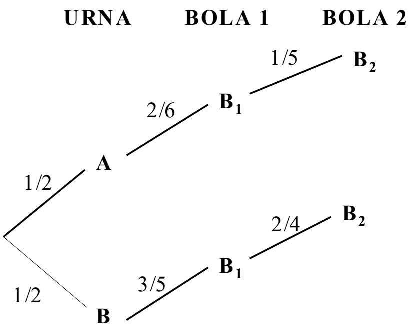
SOLUCIÓN.

a) Sean los sucesos: B_1 = "la bola extraída de la urna A es blanca", B_2 = "la bola extraída de la urna B es blanca", N_1 = "la bola extraída de la urna A es negra" y N_2 = "la bola extraída de la urna B es negra".

Se tiene: $p\left[(B_1\cap B_2)\cup(N_1\cap N_2)\right]=p(B_1\cap B_2)+p(N_1\cap N_2)=p(B_1)\cdot p(B_2)+p(N_1)\cdot p(N_2)=$

$$=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{30}+\frac{3}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}=0,3$$

b) Organicemos los casos que pueden presentarse en un diagrama en árbol:



Se tiene: $p(B_1\cap B_2)=$

$=p(A)\cdot p(B_1/A)\cdot p(B_2/A\cap B_1)+p(B)\cdot p(B_1/B)\cdot p(B_2/B\cap B_1)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{30}+\frac{3}{20}=\frac{11}{60}=0,18$

CUESTIÓN C2: La vida media de un determinado modelo de bombilla sigue una distribución normal con desviación típica igual a 60 días. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98% se obtiene el intervalo $(388'68\,,\,407'32)$ para la vida media. Calcule la media y el tamaño de la muestra elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. *(3 puntos)*

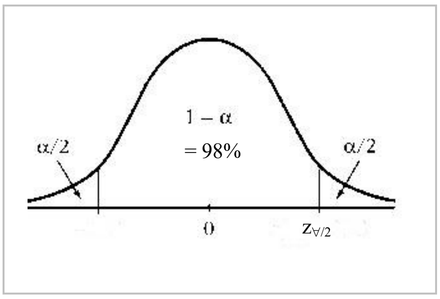
NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en caso de que los valores por exceso o por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN.

La vida media en la muestra ocupa el centro del intervalo de confianza: $\overline{X} = \dfrac{388'68 + 407'32}{2} = 398$ horas

El error máximo admisible es $E = 407'32 - 398 = 9,32$ y la desviación típica poblacional $\sigma = 60$ horas .

Obtengamos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 98%:



$1-\alpha = 0,98 \;\Rightarrow\; \alpha = 0,02 \;\Rightarrow\; \alpha/2 = 0,01 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; P\left(z \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0,01 = 0,99$ y buscando en la tabla de la normal $N(0\,,1)$ el valor más próximo que encontramos es 0,9901 al que corresponde un valor crítico: $z_{\alpha/2} = 2,33$

Tenemos entonces: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\dfrac{2,33\cdot 60}{9,32}\right)^2 = 225$ luego la muestra elegida ha sido de 225 bombillas.