Desarrolle clara y razonadamente tres cuestiones, eligiendo una del par (A1,A2), otra de (B1,B2) y otra de (C1,C2).

<u>Cuestión A1</u>: Sea $T=\left\{ (x,y) \;/\; \frac{x}{5}+\frac{y}{8}\geq 5 \;,\; \frac{x}{10}+\frac{y}{6}\leq 5 \;,\; 2x+5y\leq 110 \;,\; y\geq 0 \right\}$

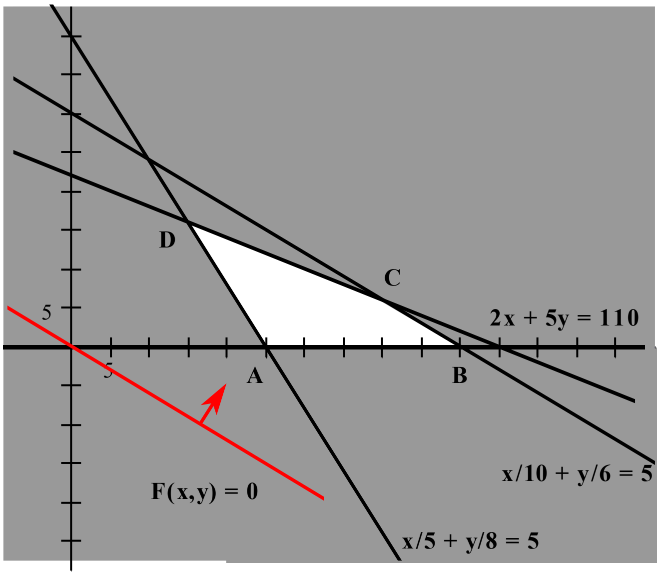
a) Represente gráficamente la región T. *(1 punto)*

b) Se considera la función $f(x,y)=3x+5y$. Calcular, si existen, los puntos (x,y) que dan el valor máximo de $f(x,y)$ y los que dan el valor mínimo de $f(x,y)$ en T. *(1,75 puntos)*

c) ¿Cuál sería la respuesta del apartado anterior si se elimina la desigualdad $y\geq 0$? *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) X La recta de ecuación $\frac{x}{5}+\frac{y}{8}=5 \iff 8x+5y=200$ pasa por los puntos $(25,0)$ y $(0,40)$. La solución de la inecuación es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.



X La recta de ecuación $\frac{x}{10}+\frac{y}{6}=5 \iff 3x+5y=150$ pasa por los puntos $(50,0)$ y $(0,30)$. La solución de la inecuación es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

X La recta de ecuación $2x+5y=110$ pasa por los puntos $(55,0)$ y $(5,20)$. La solución de la inecuación es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

X La recta $y=0$ es el eje de abscisas y la solución de la inecuación es el semiplano superior.

La región factible T es la intersección de las soluciones de todas las inecuaciones (en blanco). Sus vértices son:

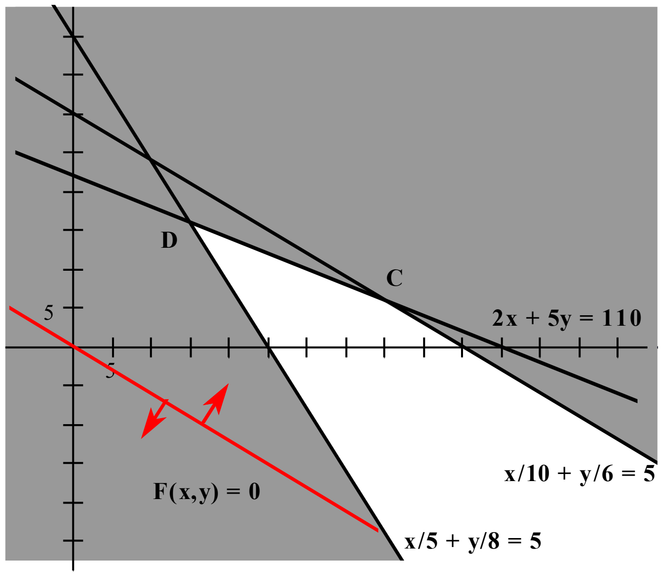
$A(25,0)$, $B(50,0)$, $C(40,6)$, $D(15,16)$

Coordenadas de C: $\begin{cases} 3x+5y=150 \\ 2x+5y=110 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+5y=150 \\ -2x-5y=-110 \end{cases} \Rightarrow x=40 \;,\; y=6$

Coordenadas de D: $\begin{cases} 8x+5y=200 \\ 2x+5y=110 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x+5y=200 \\ -2x-5y=-110 \end{cases} \Rightarrow 6x=90 \Rightarrow x=15 \;,\; y=16$

b) Dibujamos la recta de nivel 0 asociada a la función objetivo: $F(x,y)=0 \iff 3x+5y=0$ que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(25,-15)$. La desplazamos paralelamente a sí misma hasta barrer la región factible. El primer punto de T que toca es el vértice $A(25,0)$ que es donde la función objetivo se minimiza. Los últimos puntos de T que toca son los del segmento BC pues las rectas $3x+5y=0$ y $\frac{x}{10}+\frac{y}{6}=5 \iff 3x+5y=150$ son paralelas y, por tanto, la función se maximiza en cualquiera de los puntos de BC.

c) Si se elimina la desigualdad $y\geq 0$ la región factible es ahora abierta:



Ahora, para barrer la región T podemos desplazar la recta $F(x\,,y)=0$ tanto hacia “arriba” como hacia “abajo”.

Al desplazarla hacia “abajo” no encontramos un punto de T que sea el “último” común entre la correspondiente recta de nivel y la región factible por lo que no existe solución que minimice la función objetivo.

Cuando la desplazamos hacia “arriba” los últimos puntos comunes entre T y la correspondiente recta de nivel son los de la semirrecta de origen C y ecuación $\frac{x}{10}+\frac{y}{6}=5$, luego cualquiera de ellos maximizaría la función objetivo.

<u>Cuestión A2</u>: Raquel, Paula y Sara salen de compras y cada una adquiere una camiseta. El precio medio de las prendas es de 14 euros. La diferencia entre el precio de la camiseta de Sara y la de Paula es el doble de la diferencia entre el precio de la camiseta de Paula y la de Raquel. Si a Raquel le hubiera costado su camiseta el doble, sobrepasaría en un euro el precio de la de Sara.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular el precio de cada una de las camisetas y resuélvalo por el método de Gauss. *(2,5 puntos)*

b) ¿Es posible saber el precio de las camisetas si la última condición se cambia por “Si a Paula le hubiera costado su camiseta el cuádruple, sobrepasaría en 42 euros el precio de la de Raquel”?. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

Sean x = precio de la camiseta de Raquel, y = precio de la camiseta de Paula y z = precio de la camiseta de Sara.

a) Se tiene: X “el precio medio de las prendas es de 14 euros” : $\frac{x+y+z}{3}=14 \;\Leftrightarrow\; x+y+z=42$

X “la diferencia entre el precio de la camiseta de Sara y la de Paula es el doble de la diferencia entre el precio de la camiseta de Paula y la de Raquel” : $z-y=2\left(y-x\right) \;\Leftrightarrow\; z-y=2y-2x \;\Leftrightarrow\; 2x-3y+z=0$

X “si a Raquel le hubiera costado su camiseta el doble, sobrepasaría en un euro el precio de la de Sara” : $2x=z+1 \;\Leftrightarrow\; 2x-z=1$.

Se tiene por tanto el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ 2x-3y+z=0 \\ 2x \qquad -z=1 \end{array}\right. \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ -5y-z=-84 \\ -2y-3z=-83 \end{array}\right. \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ -10y-2z=-168 \\ 10y+15z=415 \end{array}\right. \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ -10y-2z=-168 \\ 13z=247 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z=19 \\ y=13 \\ x=10 \end{array}}$$

Luego la camiseta de Raquel cuesta 10 €, la de Paula 13 € y la de Sara 19 €.

Transformaciones elementales utilizadas: (1) E2 – 2E1 , E3 – 2E1 (2) E2 A 2 , E3 A (!5) (3) E3 + E2

b) El nuevo sistema será:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ 2x-3y+z=0 \\ 4y \qquad -x=42 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ 2x-3y+z=0 \\ -x+4y \quad =42 \end{array}\right. \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ -5y-z=-84 \\ 5y+z=84 \end{array}\right. \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=42 \\ -5y-z=-84 \\ 0z=0 \end{array}\right.$$

que es un sistema compatible indeterminado y, por tanto, con infinitas soluciones por lo que no es posible conocer el precio de las camisetas.

Transformaciones elementales: (1) E2 – 2E1 , E3 + E1 (2) E3 + E2

<u>Cuestión B1</u>: a) Derive las funciones $f(x) = \dfrac{2x-2}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{1-5x^4}$ *(1 punto)*

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)$ del apartado anterior, así como los puntos de inflexión. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = \dfrac{2\left(x+1\right)-\left(2x-2\right)}{\left(x+1\right)^2} = \dfrac{\cancel{2x}+2-\cancel{2x}+2}{\left(x+1\right)^2} = \dfrac{4}{\left(x+1\right)^2}$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-5x^4}}\cdot\left(-20x^3\right) = -\frac{10x^3}{\sqrt{1-5x^4}}$$

b) X Puesto que la función $f(x)$ es racional, su dominio estará formado por todos los números reales excepto los que anulen a la función denominador. Es decir: $D(f) = ¡ - \{ -1 \}$

X Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de $f''(x)$: $f''(x) = \dfrac{-4\cdot 2\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^4} = -\dfrac{8}{\left(x+1\right)^3}$

f'' > 0 f'' < 0

! 1

Luego la función es cóncava en $\left(-\infty, -1\right)$ y convexa en $\left(-1, +\infty\right)$

No tiene puntos de inflexión pues $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in D(f)$.

<u>Cuestión B2</u>: a) Derive las funciones $f(x) = x - 8x^2 + \dfrac{9}{x}$, $g(x) = \left(2x-1\right)^2 \cdot \ln x$ *(1 punto)*

b) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{3} & \text{si } x \in \left(-6, -1\right) \\ x-1 & \text{si } x \in \left[-1, 4\right] \end{cases}$

b₁) Razone si $f(x)$ es continua o discontinua en $x = -1$ y en $x = 4$. *(1,25 puntos)*

b₂) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para los valores $x \in \left(-6, -1\right)$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = 1 - 16x - \dfrac{9}{x^2}$ $\qquad g'(x) = 2\left(2x-1\right)2\cdot\ln x + \left(2x-1\right)^2\cdot\dfrac{1}{x} = \left(2x-1\right)\left[4\ln x + \dfrac{2x-1}{x}\right]$

b)

b_1) X Continuidad en $x = -1$:

- $\exists\, f(-1) = -1-1 = -2$

- $\exists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$: $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{3}\right) = -3-\dfrac{1}{3} = -\dfrac{10}{3} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(x-1\right) = -2 \end{array}$ $\Bigg|$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

Luego la función es discontinua en $x = -1$

X Continuidad en $x = 4$: la función es continua en este punto aunque sólo por su izquierda porque es una función polinómica la que está definida en dicho punto y también a su izquierda.

b_2) La función que está definida en el intervalo de estudio es $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{3}$:

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{3} = \frac{x^2 - 9}{3x^2} = \frac{(x+3)(x-3)}{3x^2}$$

En $(-6, -3)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente

En $(-3, -1)$: $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente

<u>Cuestión C1</u>: Pilar tiene en un cajón de su armario 3 bufandas rojas, 2 negras y una blanca y en otro tiene 4 gorros rojos, 2 verdes y 5 negros.

a) Si elige al azar un gorro y una bufanda ¿Cuál es la probabilidad de que ambas prendas sean del mismo color? *(1,5 puntos)*

b) Si elige al azar dos bufandas ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color? *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sean los sucesos: B_R = "extraer una bufanda roja" , B_N = "bufanda negra" , B_B = "bufanda blanca"

G_R = "extraer un gorro rojo" , G_V = "gorro verde" , G_N = "gorro negro"

a) Nos piden $p\left[(B_R \cap G_R) \cup (B_N \cap G_N)\right] = p(B_R \cap G_R) + p(B_N \cap G_N) = p(B_R) \cdot p(G_R) + p(B_N) \cdot p(G_N) =$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{11} + \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{11} = \frac{12}{66} + \frac{10}{66} = \frac{22}{66} = \frac{1}{3}$$

b) Sean los sucesos: R_1 = "la primera bufanda es roja" , R_2 = "la segunda bufanda es roja"
N_1 = "la primera bufanda es negra" , N_2 = "la segunda bufanda es negra"
B_1 = "la primera bufanda es blanca" , B_2 = "la segunda bufanda es blanca" = $\varnothing$

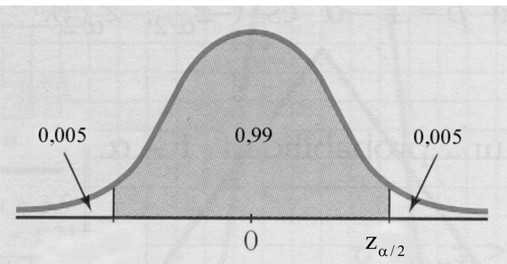
$$p\left[(R_1 \cap R_2) \cup (N_1 \cap N_2)\right] = p(R_1) \cdot p(R_2 / R_1) + p(N_1) \cdot p(N_2 / N_1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{30} + \frac{2}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

<u>Cuestión C2</u>: En Aragón se seleccionan 625 jóvenes, obteniéndose que su estatura media es de 175 cm. Determine el intervalo, con un nivel de confianza del 99%, en el que estará la media si la desviación típica es igual a 10. Detalle los pasos realizados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

El intervalo característico está centrado en la media $\mu = 175$ y su radio es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 99% (que luego obtendremos), $\sigma = 10$ es la desviación típica y $n = 625$ es el tamaño de la muestra.

Obtengamos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 99%:



$1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \Rightarrow \alpha/2 = 0,005 \Rightarrow$
$p\left[z \le z_{\alpha/2}\right] = 1 - 0,005 = 0,995 \Rightarrow$ buscando en la tabla:
$z_{\alpha/2} = 2,575$ (valor medio de 2,57 y 2,58)

Entonces: $E = 2,575 \cdot \frac{10}{\sqrt{625}} = 1,03$.

Por tanto, el intervalo característico es: $(175 - 1,03 \ , \ 175 + 1,03) = (173'97 \ , 176'03)$