Junio 2007.

OPCIÓN A

1. *a) Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 2 & a & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ 4a & a^2 & 0\\ 1-a & 0 & 1\end{pmatrix}$*, con a un parámetro real no nulo, compruebe que* $A^{-1}\cdot B=A$. *(1,5 puntos)*

b) Calcule el rango de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\\ -5 & -10 & m\end{pmatrix}$ *según los valores del parámetro real m.* *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $A^{-1}\cdot B=A \iff A\cdot A^{-1}\cdot B=A\cdot A \iff B=A^2$ es decir, comprobar que $A^{-1}\cdot B=A$ es equivalente a comprobar que $A^2=B$:

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 2 & a & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 2 & a & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ 4a & a^2 & 0\\ 1-a & 0 & 1\end{pmatrix}=B$$

b) $$\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\\ -5 & -10 & m\end{pmatrix}\overset{(1)}{=}\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 6\\ 0 & -5 & m+5\end{pmatrix}\overset{(2)}{=}\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -5 & m+5\end{pmatrix}\overset{(3)}{=}\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & m+15\end{pmatrix}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) F_2+3F_1, F_3-5F_1 (2) $F_2:3$ (3) F_3+5F_2

Se tiene entonces:
- Si $m\neq -15$: el rango de la matriz es 3
- Si $m=-15$: el rango de la matriz es 2

2. *a) Derive las funciones* $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$, $g(x)=\dfrac{6-x^5}{x^6}$, $h(x)=e^{x^3}$ *(1,5 puntos)*

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los valores de x, si existen, para los que f(x) alcanza máximo o mínimo relativo. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$$g'(x)=\frac{-5x^4\cdot x^6-\left(6-x^5\right)\cdot 6x^5}{x^{12}}=\frac{x^5\cdot\left(-5x^5-36+6x^5\right)}{x^{12}}=\frac{x^5-36}{x^7}$$

$$h'(x)=3x^2\cdot e^{x^3}$$

b) • El dominio de f(x) es $\mathbb{R}^+$ pues $\forall x>0\ \exists f(x)$ ya que existen $\sqrt{x}$ y $\ln x$.

• Los puntos críticos (posibles extremos relativos) satisfacen la ecuación $f'(x)=0$, es decir: $\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow x=1$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x-\sqrt{x}+1}{x^2}=\frac{x-2x+2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-x}{2x^2\sqrt{x}} \Rightarrow f''(1)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}>0 \Rightarrow$$ x = 1 es un punto de mínimo relativo.

3. *Pilar y Carmen son aficionadas al tiro con arco. Pilar da en el blanco 3 de cada 5 veces y Carmen da en el blanco 5 de cada 8. Si ambas tiran al blanco a la vez, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:*

A = "únicamente Pilar ha dado en el blanco", B = "ambas han dado en el blanco", C = "al menos una ha dado en el blanco". *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sean los sucesos: P = "Pilar da en el blanco" y Q = "Carmen da en el blanco". Ambos sucesos son independientes.

Se tiene:

- $p(A) = p\left(P \cap Q'\right) = p(P)\cdot p\left(Q'\right) = \frac{3}{5}\cdot\left(1-\frac{5}{8}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8} = \frac{9}{40}$

- $p(B) = p\left(P \cap Q\right) = p(P)\cdot p(Q) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

- $p(C) = p\left(P' \cap Q'\right)' = 1 - p\left(P' \cap Q'\right) = 1 - p\left(P'\right)\cdot p\left(Q'\right) = 1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$

OPCIÓN B

1. *Una empresa fabrica dos calidades de un bien, teniendo que producir en total un mínimo de 100 unidades y un máximo de 200. El coste de producción de una unidad de la primera calidad es de 15 euros y se obtiene un beneficio unitario de 100 euros. El coste de producción de una unidad de la segunda calidad es de 10 euros y se obtiene un beneficio unitario de 50 euros.*

a) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el coste total mínimo para obtenerse un beneficio total de al menos 12500 euros. *(2 puntos)*

b) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el beneficio total máximo con un coste total no superior a 2550 euros. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Organicemos en una tabla los datos del problema:

	Número	**Coste**	**Beneficio**
Primera calidad	x	15x	100x
Segunda calidad	y	10y	50y
	$x+y\geq 100$ $x+y\leq 120$	$F(x,y)=15x+10y$ $15x+10y\leq 2550$	$100x+50y\geq 12500$ $G(x,y)=100x+50y$

a) • Función objetivo: $F(x,y) = 15x + 10y$

• Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 100 \\ x + y \leq 200 \\ 100x + 50y \geq 12500 \end{cases}$

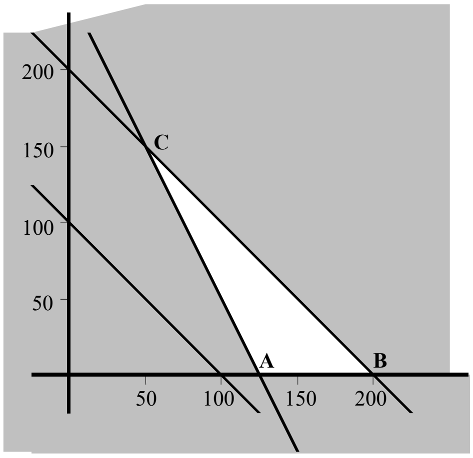
• Dibujemos la región factible:

La recta $x+y=100$ pasa por los puntos $(100,0)$ y $(0,100)$ -por ejemplo- y la solución de la inecuación $x+y\geq 100$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La recta $x+y=200$ pasa por los puntos $(200,0)$ y $(0,200)$ -por ejemplo- y la solución de la inecuación $x+y\leq 200$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La recta $100x+50y=12500$ pasa por los puntos $(100,50)$ y $(50,150)$ -por ejemplo- y la solución de la inecuación $100x+50y \geq 12500$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La región factible es el triángulo ABC cuyos vértices son: $A(125,0)$, $B(200,0)$ y $C(50,150)$



La función objetivo se minimiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos el valor de la función en cada uno de ellos:

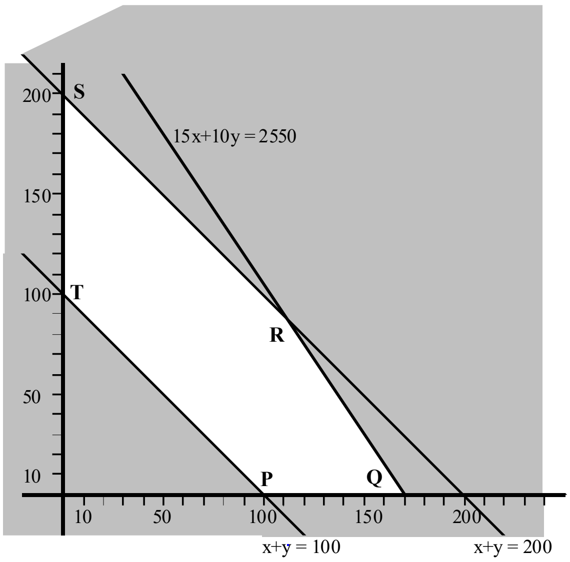
$F(125,0)=15\cdot 125+10\cdot 0=1875$ €
$F(200\ ,0)=15\cdot 200+10\cdot 0=3000$ €
$F(50,150)=15\cdot 50+10\cdot 150=2250$ €

Por tanto, el coste mínimo es de 1875 € que se obtendrá produciendo 125 bienes de primera calidad y ninguno de segunda calidad.

b) Para maximizar el beneficio, la función objetivo es ahora: $G(x,y)=100x+50y$

y las restricciones: $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y\geq 100 \\ x+y\leq 200 \\ 15x+10y\leq 2550 \end{cases}$

Dibujemos la región factible (conjunto solución del sistema de restricciones). La recta $15x+10y=2550$ pasa por los puntos $(150,30)$ y $(50,180)$ -por ejemplo- y la solución de la inecuación $15x+10y\leq 2550$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas. La región factible es entonces el pentágono PQRST cuyos vértices son los puntos:



$P(100,0)$, $Q(170,0)$, $R(110,90)$, $S(0,200)$ y $T(0,100)$.

El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices es:

$G(170,0)=17000$ € ; $G(100,0)=10000$ €
$G(110,90)=15500$ € ; $G(0,200)=10000$ €
$G(0,100)=5000$ €

Por tanto, el beneficio total máximo es de 17000 € que se obtiene produciendo 170 bienes de primera calidad

2. *a) Derive las funciones* $f(x)=\dfrac{x^3}{4}-8$, $g(x)=\sqrt{x^3}$, $h(x)=x^2-e^x$ *(1,5 puntos)*

b) Diga si la función $m(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } 0\leq x\leq 4 \\ g(x) & \text{si } 4<x \end{cases}$ *es continua en x = 4* *(0,75 puntos)*

c) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función m(x) en x = 9. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\frac{3}{4}x^2$ $\qquad g'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{3x^2\sqrt{x}}{2x}=\frac{3}{2}x\sqrt{x}$ $\qquad h'(x)=2x-e^x$

b) $m(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^3-8 & \text{si } 0\le x\le 4\\ \sqrt{x^3} & \text{si } x>4\end{cases}$

- $\exists\, m(4)=8$
- $\exists \lim\limits_{x\to 4} m(x)$: $\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} m(x)=\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{4}x^3-8\right)=8\\ \lim\limits_{x\to 4^+} m(x)=\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x^3}\right)=\sqrt{64}=8\end{array}\right| \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 4} m(x)=8$
- $\lim\limits_{x\to 4} m(x)=m(4)$ $\Rightarrow$ la función m(x) es continua en x = 4.

c) Para x = 9, $m(x)=\sqrt{x^3}$ $\Rightarrow$ $m(9)=\sqrt{9^3}=27$ luego el punto de tangencia es el $(9,27)$.

$m'(x)=\frac{3}{2}x\sqrt{x}$ y la pendiente de la tangente es por tanto: $m'(9)=\frac{3}{2}\cdot 9\cdot 3=\frac{81}{2}$

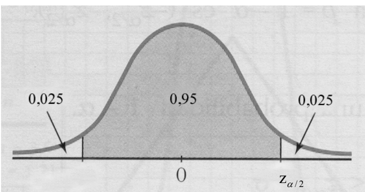
La ecuación de la tangente es entonces:

$y-y_0=m\cdot(x-x_0)$ $\Rightarrow$ $y-27=\frac{81}{2}\cdot(x-9)$ $\Leftrightarrow$ $2y-54=81x-729$ $\Leftrightarrow$ $81x-2y-675=0$

3. *En un gran supermercado se ha obtenido que el número medio de toneladas descargadas diariamente en los últimos 100 días ha sido igual a 10. Determine el intervalo, con un nivel de confianza del 95%, en el que estará la media si la desviación típica es igual a 6. Explique los pasos realizados para obtener el resultado.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

El intervalo de confianza de la media de la población μ es $\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ donde $\bar{x}=10$ es la media obtenida en la muestra, $\sigma=6$ es la desviación típica y $n=100$ es el tamaño de la muestra.



El valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente a un nivel de confianza del 95% es:

$$1-\alpha=0,95 \Rightarrow \alpha=0,05 \Rightarrow \alpha/2=0,025$$

$$0,025+0,95=0,975 \text{ y en la tabla: } F(1,96)=0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2}=1,96\,.$$

Así pues, el intervalo de confianza pedido es:

$$\left(10-1,96\cdot\frac{6}{10}\ ,\ 10+1,96\cdot\frac{6}{10}\right)=(10-1,176\ ,\ 10+1,176)=(8,824\ ,\ 11,176)$$